

Tentamen i Flervariabelanalys

2025-06-04, 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 2p vardera. På dessa uppgifter **ska endast svar lämnas**. Skriv svaren på **ett gemensamt papper**.
- **Del B** består av 4 uppgifter, numrerade 4–7, värda 3p vardera. Till dessa **krävs fullständiga och välmotiverade lösningar**.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) skall följande krav vara uppfyllda:

K1: minst 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: minst 1/2/3 godkända uppgifter på del B samt minst 8/12/16 poäng totalt på tentan.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Var god vänd!

Del A

OBS! Endast svar ska lämnas på del A, på ett gemensamt papper.

1. (a) Bestäm alla funktioner $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ som uppfyller

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \arctan y, \\ f'_y(x, y) = \frac{x}{1+y^2} + \frac{1}{y}, \end{cases} \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

- (b) Bestäm, med hjälp av variabelbytet $u = x$, $v = x^2 + y$, alla funktioner $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ som uppfyller differentialekvationen $z'_x(x, y) - 2xz'_y(x, y) = x^2 + y$.

2. (a) Låt $g(x, y) = 2x^2 + y^2$. Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = g(x, y)$, i punkten $(1, 1, 3)$.

- (b) Givet variabelbytet $\begin{cases} u = e^{xy} + 2x, \\ v = -y, \end{cases}$ för $y > 0$, ange funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(1, -1) \text{ av det inversa sambandet i punkten } (u, v) = (1, -1).$$

Notera $(u, v) = (1, -1)$ motsvarar $(x, y) = (0, 1)$.

3. (a) Bestäm integralen $\iint_D x \, dx \, dy$, där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

- (b) Låt

$$I_1 = \iint_M (\ln x)^2 \, dx \, dy \quad \text{och} \quad I_2 = \iint_N \frac{2}{1+xy} \, dx \, dy, \quad \text{där}$$

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq x \leq 2\} \quad \text{och} \quad N = [0, 1] \times [0, 1].$$

Avgör vilket/vilka av nedanstående intervall integralerna I_1 och I_2 tillhör:

$$A = [-1, 0], \quad B =]0, 1], \quad C =]1, 2], \quad D =]2, 3].$$

Del B

4. Bestäm tangentlinjen till skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z = 0$ och $x + y - z = 4$ i punkten $(1, 1, -2)$.

5. Bestäm volymen av kroppen $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 2x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

6. För vilka värden av konstanterna $a, b \in \mathbb{R}$ har funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, som ges av $f(x, y) = \sin(x^3) + ax^2 + by^2$, en lokal minimipunkt i origo?

7. För $M \subset \mathbb{R}^2$, låt K_M beteckna mängden av alla punkter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sådana att

$$z \in [0, 1], \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = (1 - z)u, \\ y = (1 - z)v, \end{cases} \quad \text{för någon punkt } (u, v) \in M.$$

- (a) Skissa K_D , där D är enhetsskivan i $\mathbb{R}^2$ (enbart svar, ingen motivering krävs).

- (b) Visa att om M har area A , så har K_M volym $A/3$.