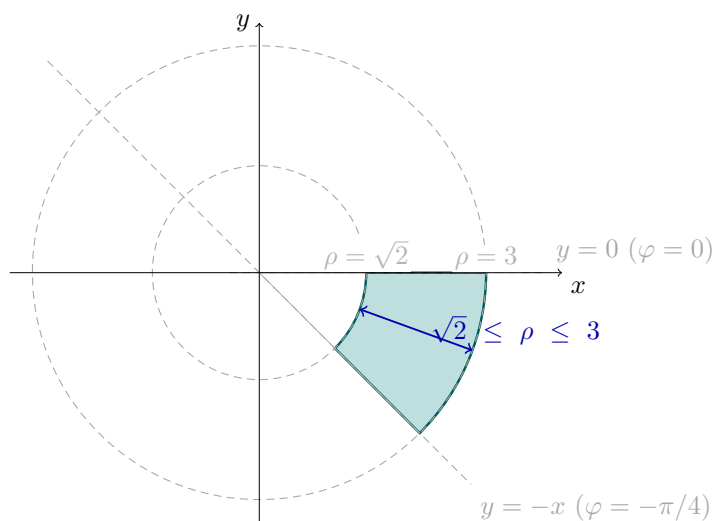


Lösningssförslag till TATB09 Flervariabelanalys 2025-10-29

OBS! På uppgift 1-2 ska bara svar anges på tentan. Nedan finns dock lösningsskisser med även för dessa uppgifter.

1. a)



Svar: $\sqrt{2} \leq \rho \leq 3, -\pi/4 \leq \varphi \leq 0$.

b) Vi har $f'_x = \frac{2x}{1+x^2} + z^3 y^2$ så $f''_{xz} = 3z^2 y^2$.

Svar: $f''_{xz} = 3z^2 y^2$.

c) Med det föreslagna variabelbytet $u = 2x + 5y, v = x$ får vi

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2z'_u + z'_v \\ z'_y &= z'_u u'_y + z'_v v'_y = 5z'_u. \end{aligned}$$

Alltså får vi

$$5z'_x - 2z'_y = 10z'_u + 5z'_v - 10z'_u = 5z'_v = 10x = 10v$$

vilket ger

$$z'_v = 2v.$$

Integrerar vi detta med avseende på v får vi nu

$$z = v^2 + f(u) = x^2 + f(2x + 5y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}).$$

Svar: $z = x^2 + f(2x + 5y), \quad f \in C^1(\mathbb{R})$.

2. a) (Ej del av uppgift, men eftersom F är C^1 , vi har $F(2, -4) = 17$ och $F'_y = 2y + e^{x^2+y}$ så att $F'_y(2, -4) = -7 \neq 0$ så existerar $f(x)$ enligt implicita funktionssatsen.) Per definition gäller $f(2) = -4$. Vidare gäller

$$f(x)^2 + e^{x^2+f(x)} = 17.$$

Deriverar vi bägge sidor får vi

$$2f(x)f'(x) + (2x + f'(x))e^{x^2+f(x)} = 0.$$

Om vi sätter in $x = 2, f(2) = -4$ får vi alltså

$$-8f'(2) + (4 + f'(2))e^0 = 0,$$

som har lösningen $f'(2) = 4/7$.

Svar: $f(2) = -4, f'(2) = 4/7$.

b) Med $f(x, y) = x^3 + xy^2$ gäller att tangentplanet till grafen ges av

$$z = f(-1, 2) + f'_x(-1, 2)(x + 1) + f'_y(-1, 2)(y - 2).$$

Vi har $f(-1, 2) = -5$ (stämmer med det som är angivet i uppgiften), $f'_x = 3x^2 + y^2$, $f'_x(-1, 2) = 7$,
 $f'_y = 2xy$, $f'_y(-1, 2) = -4$.

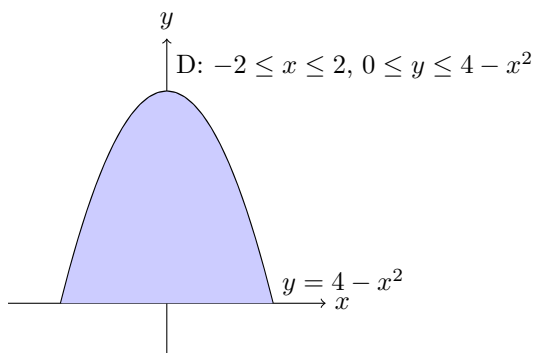
Så planet ges av

$$z = -5 + 7(x + 1) - 4(y - 2).$$

(Eller om man vill skriva det på normalform: $7x - 4y - z = -10$.)

Svar: $z = -5 + 7(x + 1) - 4(y - 2)$ (eller $7x - 4y - z = -10$).

3. a) Området ges av olikheterna $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4 - x^2$:



$$\begin{aligned} \iint_D y \, dx \, dy &= \int_{-2}^2 \left(\int_0^{4-x^2} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx = \frac{1}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 = \frac{256}{15}. \end{aligned}$$

Svar: 256/15.

b) Området, som är "nedre halvan" av klotet med centrum i origo och radie 2, ges i sfäriska koordinater av $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq 2$. Alltså gäller

$$\begin{aligned} \iiint_D 2z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^2 2r \cos(\theta) \cdot r^2 \sin(\theta) \, dr \right) d\theta \right) d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \cdot \int_0^2 r^3 \, dr \\ &= 2\pi \cdot [-\cos^2(\theta)]_{\pi/2}^{\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi \cdot (-1) \cdot 4 = -8\pi. \end{aligned}$$

Svar: -8π .

4. (a) Vi vet att gradienten $\nabla F(0, 4, 1)$, där $F(x, y, z) = x^2 + xz + yz^3 - x$, pekar i normalriktningen till ytan. Vi har här

$$\nabla F = (2x + z - 1, z^3, x + 3yz^2), \quad \nabla F(0, 4, 1) = (0, 1, 12).$$

Alltså ges tangentplanet av

$$(0, 1, 12) \bullet (x, y, z) = (0, 1, 12) \bullet (0, 4, 1) \Leftrightarrow y + 12z = 16.$$

Normallinjen ges av

$$(x, y, z) = (0, 4, 1) + t(0, 1, 12), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Svar: Tangentplan: $y + 12z = 16$. Normallinje: $(x, y, z) = (0, 4, 1) + t(0, 1, 12)$, $t \in \mathbb{R}$.

- (b) Funktionen $f(x, y)$ avtar som snabbast i en punkt (a, b) i riktningen $\bar{v} = -\nabla f(a, b)$, och riktningsderivatan är helt enkelt $-|\nabla f(a, b)|$. Så i detta fall får vi

$$\nabla f = (y \cos(xy) + 1, x \cos(xy)), \quad \bar{v} = -\nabla f(2, \pi) = -(\pi + 1, 2),$$

och

$$f'_{\bar{v}}(2, \pi) = -|(\pi + 1, 2)| = -\sqrt{(\pi + 1)^2 + 2^2} = -\sqrt{\pi^2 + 2\pi + 5}.$$

Svar: Riktning: $\bar{v} = -(\pi + 1, 2)$. Riktningsderivata: $f'_{\bar{v}}(2, \pi) = -\sqrt{\pi^2 + 2\pi + 5}$.

5. (a) Med

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2y^4}{x^2 + y^2}$$

gäller att $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1 \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$, men $f(0, y) = 2y^4/y^2 = 2y^2 \rightarrow 0$ då $y \rightarrow 0$. Eftersom vi här fick två olika värden existerar inte gränsvärdet.

Svar: Existerar ej.

- (b) Om vi låter

$$f(x, y) = \frac{\ln(1 + y + x^2) - y - x^2}{y^2 + x^4}$$

så ser vi t ex att

$$f(0, y) = \frac{\ln(1 + y) - y}{y^2} \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ då } y \rightarrow 0.$$

Men om vi tittar på kurvan $y = -x^2$ (som går genom origo då $x = 0$) får vi

$$f(x, -x^2) = \frac{\ln(1 - x^2 + x^2) + x^2 - x^2}{x^4 + x^4} = \frac{0}{2x^4} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0.$$

Alltså existerar inte gränsvärdet, eftersom vi fick två olika värden.

Svar: Existerar ej.

6. En normalvektor till grafen i en punkt $(a, b, f(a, b))$ på denna ges av $(f'_x(a, b), f'_y(a, b), -1)$, dvs. i detta fall $(2a, 4b, -1)$. Vi måste alltså hitta den punkt $(a, b, f(a, b))$ på grafen sådan att vektorn $(2a, 4b, -1)$ är parallell med normalvektorn till det givna planet, som har riktning $(2, -8, -1)$. Dvs. det ska finnas ett tal k sådant att $(2a, 4b, -1) = k(2, -8, -1)$. Från den sista koordinaten ser vi direkt att enda möjligheten är $k = 1$, vilket då ger $a = 1$ och $b = -2$. Eftersom $f(1, -2) = 10$ är den sökta punkten alltså $(1, -2, 10)$ (och vi ser att precis som påstods i uppgiften finns det endast en sådan punkt). Området D ges nu alltså av olikheterna

$$1 + x^2 + 2y^2 \leq z \leq 10.$$

Projicerar vi området D på xy -planet är det lätt att inse att projektionen K ges av $1 + x^2 + 2y^2 \leq 10$, dvs. $x^2 + 2y^2 \leq 9$. Alltså får vi att volymen V ges av

$$V = \iiint_D dx dy dz = \iint_K \left(\int_{1+x^2+2y^2}^{10} dz \right) dx dy = \iint_K (9 - x^2 - 2y^2) dx dy.$$

Om vi inför koordinaterna

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin \varphi \end{cases}$$

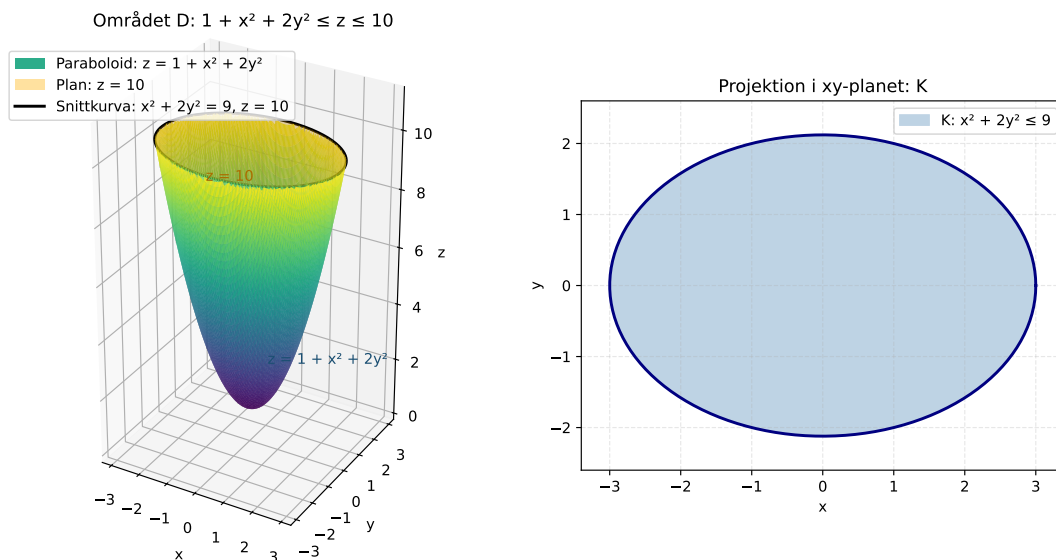
ser vi att området i dessa ges av $0 \leq \rho \leq 3$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Vidare gäller

$$dx dy = \left| \frac{d(x, y)}{d(\rho, \varphi)} \right| d\rho d\varphi = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi & \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos \varphi \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \frac{\rho}{\sqrt{2}} d\rho d\varphi.$$

Alltså gäller

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 (9 - \rho^2) \frac{\rho}{\sqrt{2}} d\rho \right) d\varphi = 2\pi \left[\frac{9\rho^2}{2\sqrt{2}} - \frac{\rho^4}{4\sqrt{2}} \right]_0^3 = \frac{81\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3D-visualisering av D och dess projektion K



Figur 1: Området D och dess projektion K i xy -planet.

Svar: $\frac{81\pi}{2\sqrt{2}}$.