

Lösningssförslag till TATA69 Flervariabelanalys 2025-01-07

OBS! På uppgift 1-2 ska bara svar anges på tentan. Nedan finns dock lösningsskisser med även för dessa uppgifter.

1. a) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ är ekvivalent med $0 \leq r \leq 3$, $y \geq 0$ är ekvivalent med att $\varphi \in [0, \pi]$, och θ har inga ytterligare begränsningar än det som följer av definitionen av sfäriska koordinater, dvs. $\theta \in [0, \pi]$.

Svar: $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

- b) **Svar:** $f'_x = 2xy \cos(x^2y)$, $f'_y = x^2 \cos(x^2y)$, $f''_{xy} = 2x \cos(x^2y) - 2x^3y \sin(x^2y)$.

- c) Med det föreslagna variabelbytet $u = 2x - 3y$, $v = x$ får vi

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2z'_u + z'_v \\ z'_y &= z'_u u'_y + z'_v v'_y = -3z'_u. \end{aligned}$$

Alltså får vi

$$3z'_x + 2z'_y = 6z'_u + 3z'_v - 6z'_u = 3z'_v = 0$$

vilket ger

$$z = f(u) = f(2x - 3y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}).$$

Svar: $z = f(2x - 3y)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$.

2. a) Vi har $F'_y = x^2 + 2y$ och $F'_y(1, -1) = -1 \neq 0$. Alltså existerar $f(x)$ och vidare gäller nu

$$x + x^2 f(x) + f(x)^2 = 1.$$

Deriverar vi bägge sidor får vi

$$1 + 2xf(x) + x^2 f'(x) + 2f(x)f'(x) = 0.$$

Per definition gäller $f(1) = -1$, och om vi sätter in $x = 1$, $f(1) = -1$ får vi alltså

$$1 - 2 + f'(1) - 2f'(1) = 0,$$

dvs. $f'(1) = -1$.

Svar: $F'_y(1, -1) = -1$, $f(1) = -1$, $f'(1) = -1$.

- b) Med $F(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + z$ gäller $F(1, -1, 2) = 5$ så punkten ligger på den givna nivåmängden. Vidare gäller att

$$\nabla F(x, y, z) = (3x^2, 4y, 1), \quad \nabla F(1, -1, 2) = (3, -4, 1),$$

och vi vet då att denna pekar i normalriktningen till ytan i punkten $(1, -1, 2)$, så tangentplanet ges av

$$(3, -4, 1) \bullet (x, y, z) = (3, -4, 1) \bullet (1, -1, 2) \Leftrightarrow 3x - 4y + z = 9.$$

Svar: $3x - 4y + z = 9$.

3. a) D ges i polära koordinater av $0 \leq \rho \leq 1$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Så

$$\begin{aligned} \iint_D 3x \, dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^1 3\rho \cos \varphi \, \rho d\rho \right) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^1 3\rho^2 \, d\rho \\ &= [\sin \varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot [\rho^3]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

Svar: 2.

b) Området ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, så att integralen blir

$$\begin{aligned} \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \left(\int_{x^2+y^2}^1 2y^2 dz \right) dx dy \\ &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} 2y^2(1-x^2-y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 2\rho^2 \sin^2(\varphi)(1-\rho^2) \rho d\rho \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi \cdot \int_0^1 (2\rho^3 - 2\rho^5) d\rho \\ &= \pi \cdot \left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Svar: $\pi/6$.

4. (a) Eftersom

$$f(x, 0) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ då } x \rightarrow 0$$

så ser vi att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \neq 0 = f(0, 0).$$

Alltså är funktionen inte kontinuerlig i $(0, 0)$. (Det är enkelt att se att gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ inte ens existerar, t ex genom att vi ser att $f(0, y) = y \rightarrow 0$ då $y \rightarrow 0$.)

Svar: Funktionen är inte kontinuerlig.

(b) Vi börjar med att beräkna $f(1, 2) = 1$, $f'_x = 3x^2$, $f'_x(1, 2) = 3$, $f'_y = 2y - 2$ och $f'_y(1, 2) = 2$, som vi behöver nedan. Rikttningsderivatan beräknas med formeln

$$f'_{\vec{v}}(1, 2) = \frac{\nabla f(1, 2) \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(f'_x(1, 2), f'_y(1, 2)) \bullet (2, -1)}{\sqrt{5}} = \frac{(3, 2) \bullet (2, -1)}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Tangentplanet för grafen $z = f(x, y)$ i $(1, 2, f(1, 2))$ ges av ekvationen

$$z = f(1, 2) + f'_x(1, 2)(x - 1) + f'_y(1, 2)(y - 2),$$

vilket med värdena ovanifrån insatta ger

$$z = 1 + 3(x - 1) + 2(y - 2),$$

vilket omskrivet på normalform blir

$$3x + 2y - z = 6$$

där vi kan läsa av en normalvektor $(3, 2, -1)$ (notera att ovanstående ekvation också kan skrivas som $(3, 2, -1) \bullet ((x, y, z) - (1, 2, 1)) = 0$).

Svar: Rikttningsderivata $f'_{\vec{v}}(1, 2) = 4/\sqrt{5}$, plan $z = 1 + 3(x - 1) + 2(y - 2)$, normalvektor $(3, 2, -1)$.

5. Skärningspunkterna A och B fås genom att sätta in $x = y = 0$ i ytans ekvation:

$$(-z)^2 + (-2z)^2 = 5 \Leftrightarrow 5z^2 = 5 \Leftrightarrow z = -1 \text{ eller } z = 1.$$

Skärningspunkterna är alltså $A = (0, 0, -1)$ och $B = (0, 0, 1)$.

Låt $F(x, y, z) = (x + y - z)^2 + (y - 2z)^2 + 3y^2$. Då är ytan en nivåyta till funktionen F , och gradientvektorerna $\nabla F(A)$ och $\nabla F(B)$ är normalvektorer till ytan i punkterna A respektive B . Vi beräknar

$$\nabla F(x, y, z) = (2(x + y - z), 2(x + y - z) + 2(y - 2z) + 6y, -2(x + y - z) - 4(y - 2z))$$

vilket ger $\nabla F(0, 0, -1) = (2, 6, -10)$ och $\nabla F(0, 0, 1) = (-2, -6, 10)$. I och med att $\nabla F(0, 0, 1) = -\nabla F(0, 0, -1)$ så är vektorn $\bar{n} := \frac{1}{2}\nabla F(0, 0, -1) = (1, 3, -5)$ normalvektor till ytan i båda punkterna. Tangentplanet i punkten $A = (0, 0, -1)$ ges nu av ekvationen

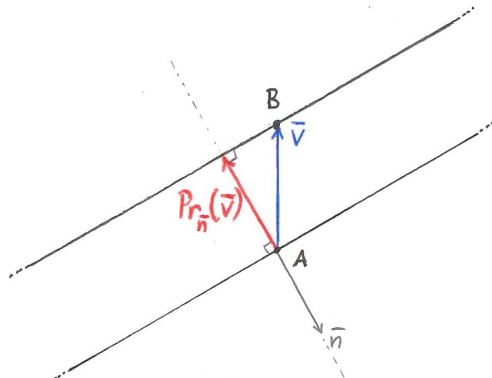
$$0 = \bar{n} \bullet ((x, y, z) - (0, 0, -1)) = (1, 3, -5) \bullet (x, y, z + 1) = x + 3y - 5z - 5$$

det vill säga $x + 3y - 5z = 5$. På samma sätt fås ekvationen till tangentplanet i punkten $B = (0, 0, 1)$ som

$$0 = \bar{n} \bullet ((x, y, z) - (0, 0, 1)) = (1, 3, -5) \bullet (x, y, z - 1) = x + 3y - 5z + 5,$$

alltså $x + 3y - 5z = -5$.

De två tangentplanen sammanfaller inte (exempelvis ligger punkten A i det ena, men inte i det andra). Då planen har en gemensam normalvektor är de parallella, och saknar därmed skärningspunkter. Vektorn $\bar{v} := B - A = (0, 0, 2)$ representerar den riktade sträckan $\overline{AB}$. Längden av dess projektion på planens normalriktning ger avståndet mellan de två tangentplanen:



$$|\text{Pr}_{\bar{n}}(\bar{v})| = \left| \frac{\bar{v} \bullet \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \bar{n} \right| = \left| \frac{\bar{v} \bullet \bar{n}}{|\bar{n}|} \right| = \frac{|2 \cdot (-5)|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-5)^2}} = \frac{10}{\sqrt{35}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}.$$

Svar: Tangentplanen i $A = (0, 0, -1)$ och $B = (0, 0, 1)$ ges av ekvationerna $x + 3y - 5z = 5$ respektive $x + 3y - 5z = -5$. Avståndet mellan planen är $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$.

6. Området är helt enkelt snittet mellan halvrummet $x + y + z < 0$ och klotet med centrum i $(1, 1, 1)$ och radie 4. Genom att göra ett ON-basbyte till ny bas, t ex

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{u}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{w}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

där vi lägger den sista basvektorn i $(1, 1, 1)$ -riktningen så ges området i de nya koordinaterna (u, v, w) av snittet mellan halvrummet $w < 0$ och klotet med centrum i $(0, 0, \sqrt{3})$ och radie 4, eftersom ett ON-basbyte inte ändrar avstånd (och avståndet från $(1, 1, 1)$ till origo är $\sqrt{3}$). Eftersom skalfaktorn vid ett sådant byte är 1 (Jacobianen är en ortogonal matris, som vi vet har determinant ± 1) kan vi nu helt enkelt räkna ut volymen av denna mängd i (u, v, w) -rummet (se 3D-bilder på nästa sida). Om vi projicerar mängden på w -axeln får vi $[-4 + \sqrt{3}, 0]$, och för varje c i detta intervall är snittet mellan planet $w = c$ och mängden en cirkelskiva

$$u^2 + v^2 \leq 16 - (w - \sqrt{3})^2$$

som har radie $r = \sqrt{16 - (w - \sqrt{3})^2}$, vilket ger arean $\pi(16 - (w - \sqrt{3})^2)$. Fubinis sats (skivformeln) ger alltså att volymen ges av

$$\int_{-4+\sqrt{3}}^0 \pi(16 - (w - \sqrt{3})^2) dw = \pi \left[16w - \frac{(w - \sqrt{3})^3}{3} \right]_{-4+\sqrt{3}}^0 = \dots = \pi \left(\frac{128}{3} - 15\sqrt{3} \right).$$

Svar: $\pi(128/3 - 15\sqrt{3})$.

Nedan är bilder först i xyz-rymden och sedan i uvw-rymden på klotet och planet i uppgift 7. Mängden i fråga är delen av klotet "under" planet.

