Flervariabelanalys: Exempel

Tomas Sjödin

19 oktober 2023

Denna sammanställning är i princip texterna ur presentationerna till video-exemplen i ett utskriftvänligt format. Det är dock inte nödvändigtvis fullständiga lösningar som är lätta att följa fristående, utan behövs mer förklaring får man gå till motsvarande video.

Efter varje exempel finns hänvisning till de rekommenderade uppgifterna ur övningshäftet *Flervariabelanalys: problemsamling* som (någorlunda) liknar föregående exempel (eventuellt ett eller flera föregående), och i slutet av varje kapitel finns även de rekommenderade extrauppgifterna.

Innehåll

1 Delmängder till $\mathbb{R}^n$. Funktioner **2**

2 Gränsvärden och kontinuitet **6**

3 Differentierbarhet och Partiella derivator för reellvärda funktioner **9**

4 Funktionalmatriser. Kedjeregeln. Partiella differentialekvationer. **14**

5 Riktningsderivator. Gradienter **19**

6 Taylors formel. Lokala extrempunkter **22**

7 Kurvor. Ytor. Funktionaldeterminanter. Inversa Funktioner **28**

8 Implicita funktionssatsen **31**

9 Dubbelintegraler **34**

10 Variabelbyten i dubbelintegraler. **40**

11 Trippelintegraler **47**

12 Integraltillämpningar. Generaliserade integraler **55**

1 Delmängder till $\mathbb{R}^n$. Funktioner

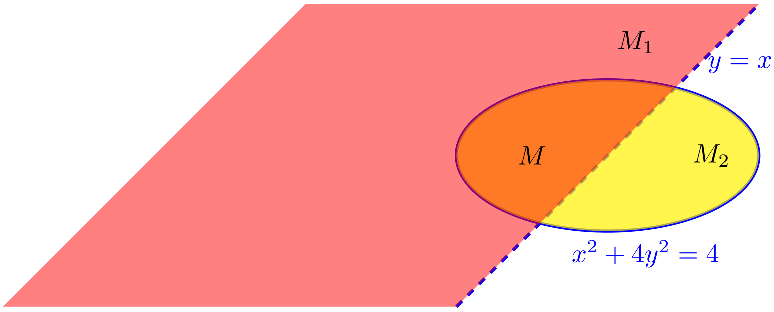
Exempel 1.1. Rita mängden

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

samt beskriv dess inre punkter, yttre punkter samt randpunkter. Är mängden öppen, sluten eller varken eller?

Lösning:
$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, x^2 + 4y^2 \leq 4\} = M_1 \cap M_2$ där

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\} \text{ och } M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$



$M^o = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, x^2 + 4y^2 < 4\}$.
$\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, x^2 + 4y^2 = 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4, x = y\}$.

$$\text{Yttre punkter:} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 > 4\}.$$

M är varken öppen eller sluten.

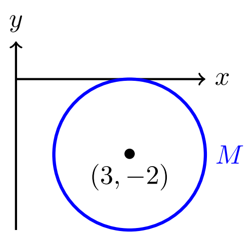
Rekommenderade uppgifter: 1.1, 1.2

Exempel 1.2. Rita mängden

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0\}$$

samt ange dess inre punkter respektive randpunkter. Är mängden öppen, sluten eller varken eller? Är den begränsad?

Lösning:
$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = (x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4 = 2^2$
Detta är en cirkel med radie 2 och centrum i $(3, -2)$.



M är sluten.
$\partial M = M$.
M saknar inre punkter.
M är begränsad.

> *Rekommenderade uppgifter: 1.3, 1.4, 1.7*

Exempel 1.3. Beskriv skärningen mellan de två mängderna i $\mathbb{R}^3$ som ges av

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \leq 3\}$$

respektive

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 1, y \geq 1, z \geq 0\}.$$

Lösning:

En olikhet på formen $ax + by + cz \leq d$ (eller $\geq d$) ger upphov till ett slutet halvrum som ligger på en sida om planet $ax + by + cz = d$ med normal (a, b, c).

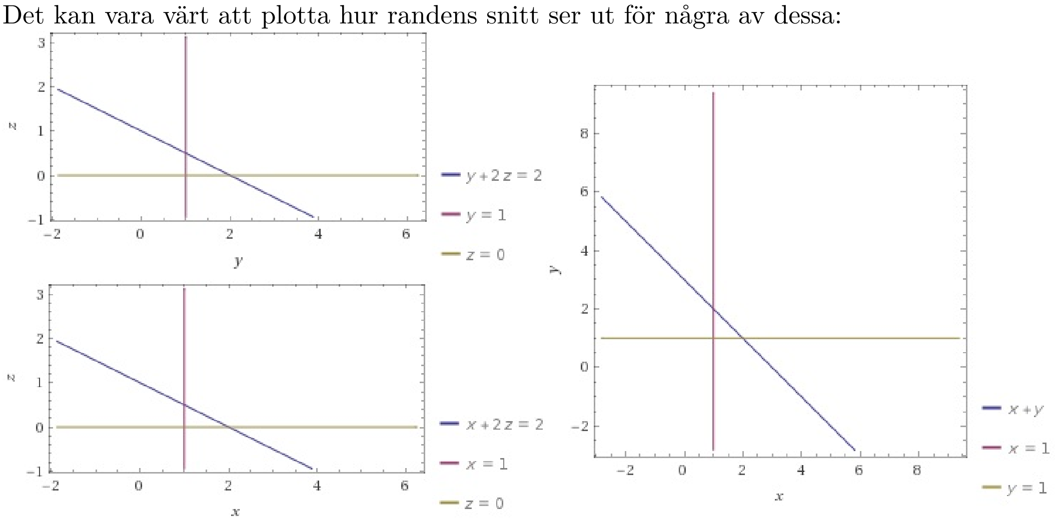
$$\begin{aligned} M = \quad & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \leq 3\} \cap \\ & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 1, y \geq 1, z \geq 0\} \end{aligned}$$

ges av de punkter (x, y, z) som uppfyller de fyra olikheterna $x + y + 2z \leq 3$, $x \geq 1$, $y \geq 1$ och $z \geq 0$.

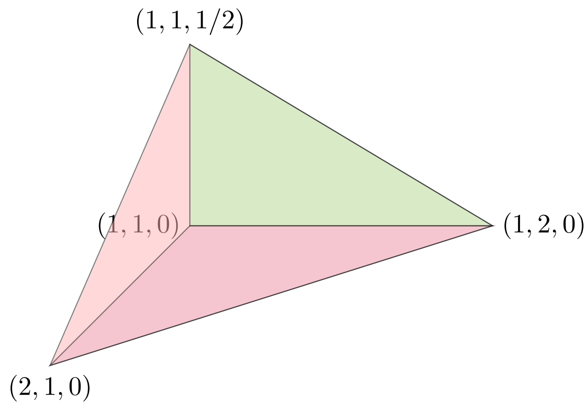
Vardera av dessa olikheter ger alltså upphov till ett halvrum, och vår mängd är snittet mellan dessa fyra halvrum.

För att förstå området kan det vara bra att först notera att randen ligger i de plan som ges av $x + y + 2z = 3$, $x = 1$, $y = 1$ respektive $z = 0$.

Det kan vara värt att plotta hur randens snitt ser ut för några av dessa:



Området är alltså en sluten tetraeder:



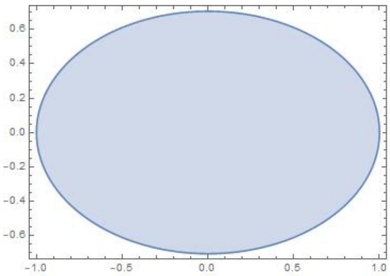
Rekommenderade uppgifter: 1.9, 1.10

Exempel 1.4. Beskriv funktionsytan $z = f(x, y)$ där $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.
Bestäm även definitionsmängden D_f och värdemängden V_f.

Lösning:
Bestämma D_f:
$z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.
D_f ges av att $1 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 \leq 1$. Detta är en ellips.
Vi kan även skriva

$$D_f = \left\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{\frac{1 - x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{1 - x^2}{2}}\right\} =$$

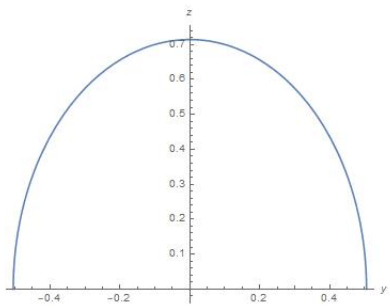
$$\left\{(x, y) : -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{1 - 2y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - 2y^2}\right\}.$$



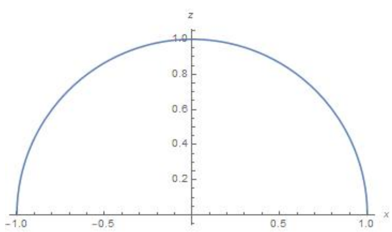
Bestämma V_f:
Eftersom z är noll på randen till denna ellips, och $1 - x^2 - 2y^2 \leq 1$ där värdet 1 antas i $(0, 0)$ ser vi att $0 \leq z \leq 1$.
Det är lätt att inse att alla värden mellan dessa antas så

$$V_f = [0, 1].$$

Kurvor på formen $f(a, y)$, $f(x, b)$:
För att förstå den tredimensionella grafen är det bra att först titta på graferna $f(a, y)$ och $f(x, b)$ för några fixa a respektive b.
T.ex. med $a = 0.7$ skulle vi få $f(0.7, y) = \sqrt{1 - (0.7)^2 - 2y^2} = \sqrt{0.51 - 2y^2}$ som plottad i yz-planet har grafen:

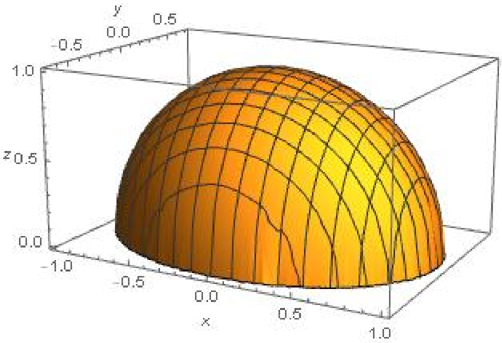


Med $b = 0$ skulle vi få $f(x, 0) = \sqrt{1 - x^2}$ som plottad i xz-planet har grafen:



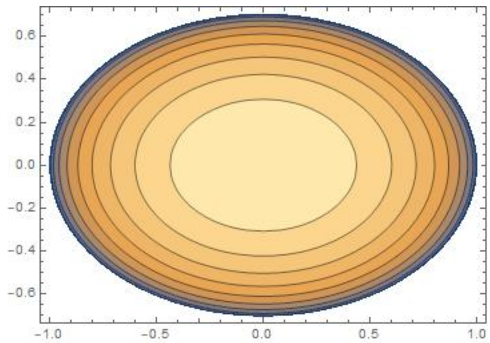
Graf:

Om man plottar ut sådana kurvor $(a, y, f(a, y))$ respektive $(x, b, f(x, b))$ för några lämpligt valda värden på a respektive b bildas ett rutnät som ligger på grafen, och från detta kan man sedan få en vettig plot:



Nivåkurvor:

Nivåkurvorna ges som lösningar till ekvationen $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2} = c \Leftrightarrow 1 - x^2 - 2y^2 = c^2$. Dessa är då ellipser $x^2 + 2y^2 = 1 - c^2$ för $c \in [0, 1[$, och endast punkten $(0, 0)$ om $c = 1$.



Rekommenderade uppgifter: 1.12

Exempel 1.5. Rita nivåkurvorna $f(x, y) = c$ då $f(x, y) = x^2 - y^2 - 4y$ för $c = -1, 0, 1$.

Lösning:

$x^2 - y^2 - 4y = c \Leftrightarrow x^2 - (y + 2)^2 + 4 = c$.

Eftersom $4 - c \geq 0$ för de c vi ska titta på löser vi ut

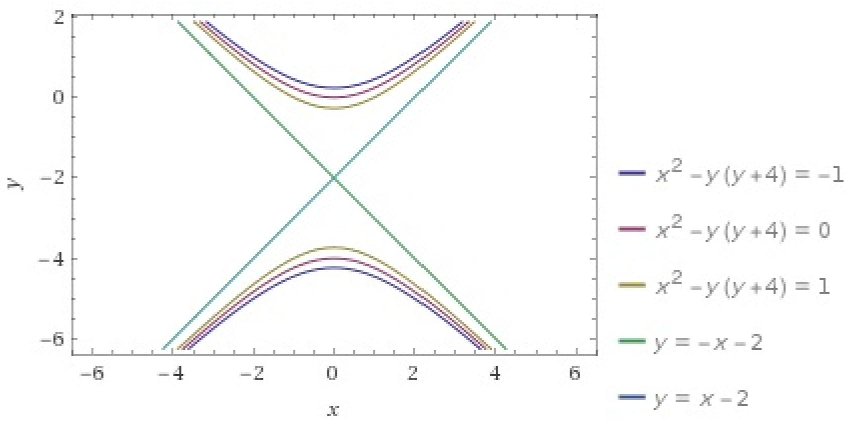
$$(y + 2)^2 - x^2 = 4 - c \Leftrightarrow y = -2 \pm \sqrt{x^2 + 4 - c}.$$

Detta ger hyperbler med asymptoter $y = -2 \pm x$.

För $c = -1$ skär dessa y-axeln (d.v.s. när $x = 0$) i $y = -2 + \sqrt{5}$ och $y = -2 - \sqrt{5}$.

För $c = 0$ skär dessa y-axeln i $y = 0$ och $y = -4$.

För $c = 1$ skär dessa y-axeln i $y = -2 + \sqrt{3}$ och $y = -2 - \sqrt{3}$.



Rekommenderade uppgifter: 1.13

Extrauppgifter: 1.5, 1.6, 1.11

2 Gränsvärden och kontinuitet

Exempel 2.1. Beräkna, om gränsvärdet existerar:

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2},$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$$

Lösning (a): Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} = \frac{\rho^3(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi)}{\rho^2} =$$
$$\rho(\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi) = /\text{Eftersom } (\cos^3\varphi + 2\sin^3\varphi) \text{ är begränsad}/ \to 0 \text{ då } \rho \to 0.$$

Eftersom $\rho \to 0$ då $(x,y) \to 0$ följer det att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} = 0$.
Lösning (b): Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)} \to \frac{1}{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}, \text{ då } \rho \to 0.$$

Detta beror dock på φ. T.ex. om vi tar $\varphi = 0$, vilket svarar mot att vi går längs med positiva x-axeln får vi 1, och om vi tar $\varphi = \pi/2$, vilket svarar mot att vi går längs med positiva y-axeln får vi -1. Alltså existerar inte gränsvärdet.
Lösning (b), Alternativ 2: Vi måste inte införa polära koordinater här. Om vi går in mot $(0,0)$ längs x-axeln får vi när vi sätter $y = 0$ i uttrycket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

När vi går längs med y-axeln får vi istället

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1.$$

Alltså existerar inte gränsvärdet.

Rekommenderade uppgifter: 1.21 (Se även Exempel 2.7 nedan.)

Exempel 2.2. Beräkna, om gränsvärdet existerar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^4+2x^2y^2+y^4}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^4+2x^2y^2+y^4} = /\cos t = 1 - t^2/2 + b(t)t^4,\ \text{där } b(t) \text{ är begränsad nära } 0/ = \\
&\frac{1-(x^2+y^2)^2/2 + b(x^2+y^2)(x^2+y^2)^4 - 1}{x^4+2x^2y^2+y^4} = \\
&\frac{1-(x^2+y^2)^2/2 + b(x^2+y^2)(x^2+y^2)^4 - 1}{(x^2+y^2)^2} = \\
&-\frac{1}{2} + \frac{b(\rho^2)\rho^8}{\rho^4} \to -\frac{1}{2} \text{ då } \rho \to 0.
\end{aligned}$$

Rekommenderade uppgifter: 1.22

Exempel 2.3. Beräkna, om gränsvärdet existerar:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin(x^2-2x+y^2+1)}{x^2-2x+y^2+1}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin(x^2-2x+y^2+1)}{x^2-2x+y^2+1} = /x = 1+t/ = \\
&\lim_{(t,y)\to(0,0)} \frac{\sin((1+t)^2-2(1+t)+y^2+1)}{(1+t)^2-2(1+t)+y^2+1} = \\
&\lim_{(t,y)\to(0,0)} \frac{\sin(t^2+y^2)}{t^2+y^2} = 1.
\end{aligned}$$

Ovan använde vi att $t^2+y^2 \to 0$ då $(t,y) \to (0,0)$, samt att $\sin s/s \to 1$ då $s \to 0$ med $s = t^2+y^2$.

Rekommenderade uppgifter: 1.23ab

Exempel 2.4. Beräkna, om gränsvärdet existerar:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Lösning: Med sfäriska koordinater $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ får vi

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2z}{x^2+y^2+z^2} = \\
&\frac{r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta r\cos\theta}{r^2} = \\
&r(\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos\theta) \to 0 \text{ då } r \to 0.
\end{aligned}$$

Eftersom $r \to 0$ då $(x,y,z) \to (0,0,0)$ så följer det att $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2z}{x^2+y^2+z^2} = 0$.

Rekommenderade uppgifter: 1.24abc

Exempel 2.5. Beräkna, om gränsvärdet existerar:

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \frac{x^2+y^2}{2x^2-y+2y^2}.$$

Lösning: Med polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+y^2}{2x^2-y+2y^2} = \\
&\frac{\rho^2}{2\rho^2-\rho\sin\varphi} = \\
&\frac{1}{2-\sin\varphi/\rho} \to \frac{1}{2} \text{ då } \rho\to\infty.
\end{aligned}$$

Eftersom $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ följer det att

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \frac{x^2+y^2}{2x^2-y+2y^2} = \frac{1}{2}.$$

Rekommenderade uppgifter: 1.25

Exempel 2.6. Funktionen

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2-y)}{2(x^2-y)}$$

är inte definierad i $(0,0)$. Går det att definiera $f(0,0)$ så att funktionen blir kontinuerlig i origo?

Lösning: Eftersom $t = x^2-y \to 0$ då $(x,y)\to 0$, samt $\sin t/t \to 1$ då $t\to 0$ får vi:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2-y)}{2(x^2-y)} = \frac{1}{2}.$$

Om vi definierar

$$f(0,0) = \frac{1}{2}$$

blir funktionen kontinuerlig i origo.

Rekommenderade uppgifter: 1.28,1.29

Exempel 2.7. Beräkna, om gränsvärdet existerar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}.$$

Lösning: Vi börjar med att testa polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

$$\begin{aligned}
&\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2} = \frac{\rho^4}{\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)} = \\
&\frac{\rho^2}{(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}.
\end{aligned}$$

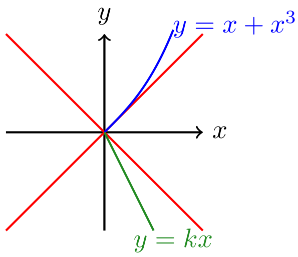
OBS! uttrycket $1/(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$ är inte begränsat, så vi kan inte dra (den felaktiga) slutsatsen att gränsvärdet blir 0. Vi ser att nämnaren blir noll precis på linjerna $y = \pm x$. Notera att om vi går in längs räta linjer $y = kx$ (eller $x = 0$) med $k \neq \pm 1$ så får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2 + k^2x^2)^2}{(x^2 - k^2x^2)} = \ldots = 0.$$

Men om vi istället tittar på en lämplig kurva som tangerar t.ex. $y = x$ i origo, som $y = x + x^3$ för säg $x > 0$ så får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2 + (x + x^3)^2)^2}{x^2 - (x + x^3)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x^2 + 2x^4 + x^6)^2}{-2x^4 - x^6} = \ldots = -2.$$

Eftersom vi hittat kurvor som går in mot punkten, men som ger olika gränsvärden existerar inte gränsvärdet.



Notera alltså speciellt att det inte räcker att kolla gränsvärden längs räta linjer som går in mot punkten i allmänhet.

Exempel 2.8. Beräkna, om gränsvärdet existerar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + 3y^2}.$$

Lösning: Alternativ 1

$$\left|\frac{xy^3}{x^2 + 3y^2}\right| \leq \frac{|x||y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 \to 0 \text{ då } (x, y) \to (0, 0).$$

Lösning: Alternativ 2

$$\frac{xy^3}{x^2 + 3y^2} = \frac{\rho^4 \cos\varphi \sin^3\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)} = \rho^2 \cdot \frac{\cos\varphi \sin^3\varphi}{(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)} \to 0 \text{ då } \rho \to 0,$$

eftersom

$$\left|\frac{\cos\varphi \sin^3\varphi}{1 + 2\sin^2\varphi}\right| \leq 1,$$

då $|\cos\varphi| \leq 1$, $|\sin\varphi| \leq 1$ och $2\sin^2\varphi \geq 0$.

SVAR: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+3y^2} = 0$.

Extrauppgifter: 1.20, 1.26, 1.27, 1.30

3 Differentierbarhet och Partiella derivator för reellvärda funktioner

Exempel 3.1. Beräkna

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{och} \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

då

$$f(x, y) = x \sin y + e^{x^2 y}.$$

Bestäm även $f'_x(1, 0)$.

Lösning:

$$f(x, y) = x \sin y + e^{x^2 y}.$$
$$f'_x = \sin y + e^{x^2 y} \cdot 2xy,$$
$$f'_y = x \cos y + e^{x^2 y} \cdot x^2,$$
$$f'_x(1, 0) = \sin 0 + e^{1^2 \cdot 0} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 0) = 0.$$

Rekommenderade uppgifter: 2.1

Exempel 3.2. Beräkna

$$f'_z(1, 0, 2)$$

då

$$f(x, y, z) = \ln(1 + xy + z^2).$$

Lösning:

$$f(x, y, z) = \ln(1 + xy + z^2).$$
$$f'_z = \frac{1}{1 + xy + z^2} \cdot (2z) = \frac{2z}{1 + xy + z^2},$$
$$f'_z(1, 0, 2) = \frac{2 \cdot 2}{1 + 1 \cdot 0 + 2^2} = \frac{4}{5}.$$

Rekommenderade uppgifter: 2.2ab

Exempel 3.3. Beräkna

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ och } f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

då

$$f(x, y) = x^2 y^3 + 2e^y.$$

Lösning:

$$f(x, y) = x^2 y^3 + 2e^y.$$
$$f'_x = 2xy^3,$$
$$f'_y = 3x^2 y^2 + 2e^y,$$
$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = 2y^3,$$
$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = 6xy^2,$$
$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = 6xy^2,$$
$$f''_{yy} = (f'_y)'_y = 6x^2 y + 2e^y.$$

Rekommenderade uppgifter: 2.3

Exempel 3.4. Lös systemet av partiella differentialekvationer i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} z'_x = y\cos x, \\ z'_y = \sin x + 2y. \end{cases}$$

Lösning: Vi vill alltså hitta alla $z = f(x, y)$ som löser de två ekvationerna $z'_x = y\cos x$ och $z'_y = \sin x + 2y$ simultant.

Ekvationen $z'_x = y\cos x$ medför att $z = y\sin x + h(y)$.

Derivation av denna med avseende på y ger nu $z'_y = \sin x + h'(y) = \sin x + 2y$, (där vi använt ekvationen $z'_y = \sin x + 2y$).

Detta medför att $h'(y) = 2y$, så $h(y) = y^2 + c$. Eftersom $z = y\sin x + h(y)$, blir allmänna lösningen $z = y\sin x + y^2 + c$.

SVAR: $z = y\sin x + y^2 + c$.

Rekommenderade uppgifter: 2.7 (Se även exempel 3.6 nedan där lösning saknas.)

Exempel 3.5. Lös systemet av partiella differentialekvationer i $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} w'_x = 2xz + y, \\ w'_y = x + 3y^2 z, \\ w'_z = x^2 + y^3 + 1. \end{cases}$$

Lösning: Vi vill hitta de $w = w(x, y, z)$ som simultant löser

$$w'_x = 2xz + y,\ w'_y = x + 3y^2 z,\ w'_z = x^2 + y^3 + 1.$$

Den första ekvationen ger

$$w'_x = 2xz + y \Rightarrow w = x^2 z + xy + h(y, z).$$

Derivation av denna med avseende på y och användande av den andra ekvationen ger nu

$$w'_y = x + h'_y = x + 3y^2 z \Rightarrow h'_y = 3y^2 z.$$

Om vi integrerar det sita ned avseende på y får vi (eftersom h inte får bero på x)

$$h(y, z) = y^3 z + k(z) \Rightarrow w = x^2 z + xy + y^3 z + k(z).$$

Om vi deriverar den sista ekvationen ovan med avseende på z och använder vår tredje ekvation får vi

$$w'_z = x^2 + y^3 + k'(z) = x^2 + y^3 + 1.$$

Slutligen är det bara att integrera med avseende på z för att få fram k:

$$k'(z) = 1 \Rightarrow k(z) = z + c,$$

och sätta in detta i $w = x^2 z + xy + y^3 z + k(z)$.

SVAR: $w = x^2 z + xy + y^3 z + z + c$.

Rekommenderade uppgifter: 2.9

Exempel 3.6. Lös systemet av partiella differentialekvationer i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} z'_x = x^2, \\ z'_y = x + y. \end{cases}$$

Lösning:

$$z'_x = x^2 \Rightarrow z = x^3/3 + h(y) \Rightarrow z'_y = h'(y) = x + y.$$

SVAR: Lösning saknas.

Exempel 3.7. Bestäm alla:

(a) $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ som uppfyller $z'_x = 1$,

(b) $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ som uppfyller $z''_{xy} = 1$.

Lösning (a):

$$z'_x = 1 \Leftrightarrow z = x + h(y).$$

SVAR: Alla funktioner på formen $z = x + h(y)$ där $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Lösning (b):

$$\begin{aligned} z''_{xy} = 1 &\Rightarrow z'_x = y + k(x) \\ &\Rightarrow z = xy + K(x) + H(y). \end{aligned}$$

SVAR: Alla funktioner på formen $z = xy + K(x) + H(y)$ där $K, H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Rekommenderade uppgifter: 2.11abcdef

Exempel 3.8. Låt $f(x, y) = x^2 + 3x^3y^2$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i $(1, -1, 4)$.

(* Bestäm funktionalmatrisen $\dfrac{\partial f}{\partial(x, y)}$. Bestäm speciellt $\dfrac{\partial f}{\partial(x, y)}(1, -1)$.)

Tangentplan: $f(1, -1) = 4$ så $(1, -1, 4)$ ligger på grafen till $z = f(x, y)$.

$$f'_x = 2x + 9x^2y^2, \quad f'_y = 6x^3y, \quad f'_x(1, -1) = 11, \quad f'_y(1, -1) = -6.$$

$$\begin{aligned} z &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \\ &= 4 + 11(x - 1) - 6(y + 1). \end{aligned}$$

Alternativ lösning med matriser*: $f(1, -1) = 4$ så $(1, -1, 4)$ ligger på grafen till $z = f(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 9x^2y^2 & 6x^3y \end{pmatrix}.$$

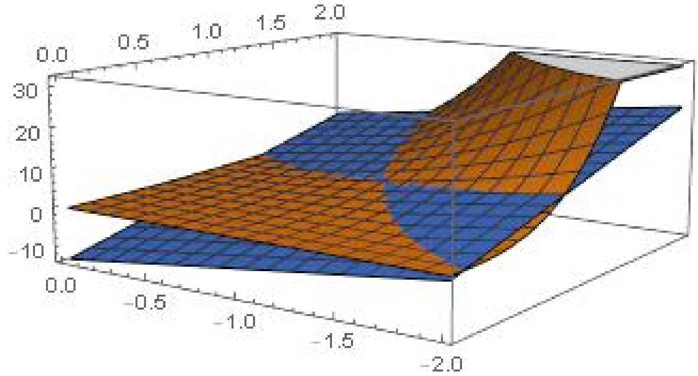
$$\frac{\partial f}{\partial(x, y)}(1, -1) = (11 \quad -6).$$

$$f(x, y) = f(1, -1) + \frac{\partial f}{\partial(x, y)}(1, -1) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} + \psi(\bar{h})|\bar{h}|,$$

där $\psi(\bar{h}) \to 0$ då $\bar{h} = (x - 1, y + 1) \to 0$.

Tangentplanets ekvation blir:

$$z = 4 + (11 \quad -6) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} = 4 + 11(x - 1) - 6(y + 1).$$



Rekommenderade uppgifter: 2.12

Exempel 3.9. Bestäm differentialen till

$$f(x,y,z) = x^2 + xz + \cos(yz).$$

Lösning:

$$f(x,y,z) = x^2 + xz + \cos(yz).$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = (2x + z \quad -z\sin(yz) \quad x - y\sin(yz)).$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$= (2x+z)dx - z\sin(yz)dy + (x - y\sin(yz))dz.$$

Rekommenderade uppgifter: 2.13, 2.14

Exempel 3.10. Beräkna $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$ samt avgör om f är differentierbar i $(0,0)$ om

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^6}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Lösning:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4 - 0}{h} = 1.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^6/k^4 - 0}{k} = 0.$$

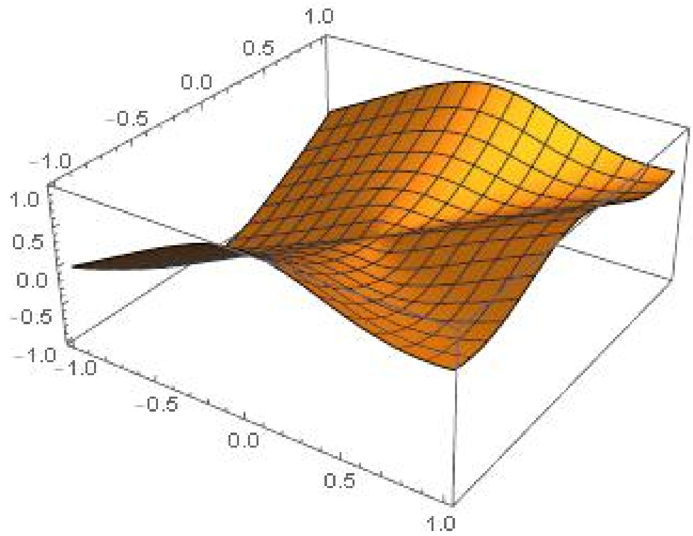
f är differentierbar i $(0,0)$ om och endast om

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)k + R(h,k)|(h,k)| = 0 + 1\cdot h + 0 \cdot k + R(h,k)|(h,k)|,$$

där $R(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$. Löser vi ut R ovan får vi

$$\begin{aligned} R(h,k) \quad = \quad & \frac{f(h,k) - f(0,0) - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{h^5+k^6}{(h^2+k^2)^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\ & \frac{k^6 - 2h^3k^2 - hk^4}{(h^2+k^2)^{5/2}} = /h = \rho\cos\varphi,\ k = \rho\sin\varphi/ = \\ & \frac{\rho^6\sin^6\varphi - 2\rho^5\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \rho^5\cos\varphi\sin^4\varphi}{\rho^5} \\ & \to -2\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \cos\varphi\sin^4\varphi \text{ då } \rho \to 0. \end{aligned}$$

Eftersom detta blir olika för olika φ saknas gränsvärdet. Så det betyder att R inte går mot noll, och alltså är funktionen inte differentierbar i $(0,0)$. (Det kan vara värt att notera att $\varphi = 0$ respektive π motsvarar att vi är på x-axeln, och $\varphi = \pi/2$ respektive $3\pi/2$ svarar mot att vi är på y-axeln. Notera att gränsvärdet ovan då är 0, vilket det ska vara eftersom partialderivatorna existerar i punkten.)



Exempel 3.11. Om $f(x, y) = x^2 + 2xy$, hur mycket ändras f ungefär om x ökar från 2 till 2.1 och y minskar från 3 till 2.8?

Lösning:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \approx f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k.$$

$$f(x, y) = x^2 + 2xy, \quad f'_x = 2x + 2y, \quad f'_y = 2x.$$

Med $a = 2, b = 3, h = 0.1, k = -0.2$ får vi

$$f'_x(2, 3) = 10, \quad f'_y(2, 3) = 4.$$

$$\begin{aligned} f(2.1, 2.8) - f(2, 3) &= f(2 + 0.1, 3 - 0.2) - f(2, 3) \\ &\approx 10 \cdot 0.1 + 4 \cdot (-0.2) = 0.2. \end{aligned}$$

SVAR: Ökar ungefär med 0.2.

Extrauppgifter: 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.11gh, 2.16, 2.17, 2.18

4 Funktionalmatriser. Kedjeregeln. Partiella differentialekvationer.

Exempel 4.1. Visa att om $z = f(x + 2y)$ där $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, då löser z ekvationen

$$2z'_x - z'_y = 0.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} z &= f(x + 2y) \\ z'_x &= f'(x + 2y) \cdot 1 = f'(x + 2y). \\ z'_y &= f'(x + 2y) \cdot 2 = 2f'(x + 2y). \\ 2z'_x - z'_y &= 2f'(x + 2y) - 2f'(x + 2y) = 0. \end{aligned}$$

Rekommenderade uppgifter: 2.19, 2.20

Exempel 4.2. Uttryck z'_x och z'_y med hjälp av z'_u och z'_v (och ev. x och y) om

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = x - y. \end{cases}$$

Lösning: $u = xy$, $v = x - y$

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= y\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = yz'_u + z'_v. \\ z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= x\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = xz'_u - z'_v. \end{aligned}$$

Rekommenderade uppgifter: 2.21

Exempel 4.3. Betrakta variabelbytet

$$\begin{cases} u = -x + y, \\ v = 2x - y. \end{cases}$$

Uttryck z'_x och z'_y med hjälp av z'_u och z'_v. Använd sedan detta för att bestämma alla $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ som löser

$$z'_x + 2z'_y = 0.$$

Lösning: $u = -x + y$, $v = 2x - y$

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial z}{\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v} = -z'_u + 2z'_v. \\ z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = z'_u - z'_v. \\ z'_x + 2z'_y &= -z'_u + 2z'_v + 2(z'_u - z'_v) = z'_u = 0 \\ &\Leftrightarrow z = h(v) = h(2x - y). \end{aligned}$$

SVAR: Lösningarna ges av alla funktioner på formen $z = h(2x - y)$ där $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Rekommenderade uppgifter: 2.22, 2.23

Exempel 4.4. Bestäm alla funktioner av klass $\mathcal{C}^1$ i första kvadranten som uppfyller

$$2x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = y^2,$$

och $z(1, y) = y^2$, genom att införa

$$\begin{cases} u = xy^2, \\ v = x. \end{cases}$$

Lösning:

$$u = xy^2, v = x.$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y^2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2xy\frac{\partial z}{\partial u}.$$
$$2x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 2x(y^2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}) - y(2xy\frac{\partial z}{\partial u}) = 2x\frac{\partial z}{\partial v} = y^2.$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y^2}{2x} = \frac{u}{2v^2},$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-u}{2v} + h(u) = \frac{-y^2}{2} + h(xy^2).$$

Allmänna lösningen ges därför av $z = -y^2/2 + h(xy^2)$ där $h :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ är av klass $\mathcal{C}^1$.

För att hitta de lösningar som uppfyller bivillkoret $z(1, y) = y^2$ för alla y, då tar vi den allmänna lösningen $z(x, y) = -y^2/2 + h(xy^2)$, och sätter in detta villkor:

$$z(1, y) = -y^2/2 + h(y^2) = y^2 \Leftrightarrow h(y^2) = 3y^2/2.$$

D.v.s. i detta fall får vi $h(t) = 3t/2$, så lösningen blir då

$$z(x, y) = -y^2/2 + 3xy^2/2.$$

SVAR: $z(x, y) = -y^2/2 + 3xy^2/2$.

Det kan också vara värt att nämna att antagandet att vi är i första kvadranten har att göra med att koefficienterna framför z'_x och z'_y är noll på x- respektive y-axeln. Vi kan också notera att det föreslagna variabelbytet inte är globalt inverterbart, men inverterbart med antagandet att $x > 0, y > 0$.

Rekommenderade uppgifter: 2.26

Exempel 4.5. Bestäm z''_{yy} uttryckta i derivator med avseende på u och v då

$$\begin{cases} u = x + 3y, \\ v = 2x - y. \end{cases}$$

Lösning:

$$u = x + 3y, v = 2x - y.$$
$$(*) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 3\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}.$$

$$\begin{aligned}
z''_{yy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = /w = z \text{ i } (*)/ \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(3\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) = /\text{linjäritet (produktregeln)}/ \\
&= 3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= \Big/ w = \frac{\partial z}{\partial u} \text{ respektive } w = \frac{\partial z}{\partial v} \text{ i } (*) \Big/ \\
&= 3\left(3\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right) - \left(3\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right) \\
&= 9\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
&= 9\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 6\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

> *Rekommenderade uppgifter: 2.31, 2.33*

Exempel 4.6. Bestäm alla lösningar z av klass $\mathcal{C}^2$ till

$$xz''_{xx} - yz''_{xy} + z'_x = 0, \quad y \neq 0,$$

genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u = y, \\ v = xy. \end{cases}$$

Lösning:

$$u = y, v = xy.$$

$$(*) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial w}{\partial v}.$$

$$(**) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} + x\frac{\partial w}{\partial v}.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = /w = z \text{ i } (*)/ \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial z}{\partial v}\right) = /\text{linjäritet/produktregeln}/ \\
&= y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\
&= \Big/ w = \frac{\partial z}{\partial v} \text{ i } (*) \Big/ \\
&= y\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = /w = z \text{ i } (*)/ \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial z}{\partial v}\right) = /\text{linjäritet/produktregeln}/ \\
&= y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial v} \\
&= \Big/ w = \frac{\partial z}{\partial v} \text{ i } (**) \Big/ \\
&= y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + x\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial z}{\partial v} \\
&= xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Lösning av ekvationen:

$$xz''_{xx} - yz''_{xy} + z'_x = xy^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - xy^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - y\frac{\partial z}{\partial v} + y\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = h(u)$$

$$\Leftrightarrow z = H(u) + K(v).$$

SVAR: Alla funktioner på formen $z = H(y) + K(xy)$ där H, K är av klass $\mathcal{C}^2$ på $\mathbb{R}$.

Rekommenderade uppgifter: 2.32abc, 2.34

Exempel 4.7. Uttryck w'_u, w'_v och w''_{uu} i x, y om

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x - y. \end{cases}$$

Lösning:

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x - y. \end{cases}$$

$$w'_x = w'_u u'_x + w'_v v'_x = 2x w'_u + w'_v,$$

$$w'_y = w'_u u'_y + w'_v v'_y = 2y w'_u - w'_v.$$

Så

$$w'_x + w'_y = (2x + 2y) w'_u \Leftrightarrow w'_u = \frac{1}{2x + 2y}(w'_x + w'_y).$$

$$w'_v = w'_x - 2x w'_u = \ldots = \frac{2y w'_x - 2x w'_y}{2x + 2y}.$$

$$w''_{uu} = (w'_u)'_u = \frac{1}{2x + 2y}((w'_u)'_x + (w'_u)'_y) =$$

$$\frac{1}{2x + 2y}\left(\left(\frac{1}{2x + 2y}(w'_x + w'_y)\right)'_x + \left(\frac{1}{2x + 2y}(w'_x + w'_y)\right)'_y\right) =$$

$$\frac{1}{(2x + 2y)^2}\left(w''_{xx} + w''_{yx} + w''_{xy} + w''_{yy}\right) - \frac{4}{(2x + 2y)^3}\left(w'_x + w'_y\right) =$$

$$\frac{1}{(2x + 2y)^2}\left(w''_{xx} + 2w''_{xy} + w''_{yy} - \frac{4(w'_x + w'_y)}{2x + 2y}\right).$$

(Notera att vi ovan tillämpade formeln för w'_u när vi byter ut w mot w'_u.)

Alternativt skrivsätt med differentialoperatorer:

Påståendet

$$w'_u = \frac{1}{2x + 2y}(w'_x + w'_y)$$

som gäller för alla w, kan alternativt skrivas

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2x + 2y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2x + 2y}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Alltså gäller

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(\frac{1}{2x + 2y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2x + 2y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2x + 2y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2x + 2y}\frac{\partial}{\partial y}\right) w =$$

$$\left(\frac{1}{2x + 2y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2x + 2y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{2x + 2y}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2x + 2y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \ldots$$

$$= \frac{1}{(2x + 2y)^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{4}{(2x + 2y)}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{4}{(2x + 2y)}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Extrauppgifter: 2.25, 2.27, 2.28, 2.29, 2.32d, 2.36, 2.37, 2.39, 2.40, 2.41

5 Riktningsderivator. Gradienter

Exempel 5.1. Beräkna gradienten grad$f = \nabla f$ till

$$f(x, y, z) = x + \cos z + \ln(xyz).$$

Lösning:

$$f(x, y, z) = x + \cos z + \ln(xyz).$$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &= \left(1 + \frac{yz}{xyz}, \frac{xz}{xyz}, -\sin z + \frac{xy}{xyz}\right)\\ &= \left(1 + \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\sin z + \frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

Rekommenderade uppgifter: 2.42

Exempel 5.2. Rita nivåkurvan $f(x, y) = 1$ då

$$f(x, y) = y - \mathrm{e}^x.$$

Visa att $(0, 2)$ ligger på denna. Beräkna $\nabla f(0, 2)$ och rita ut denna vektor i figuren. Notera att den är vinkelrät mot nivåkurvan.

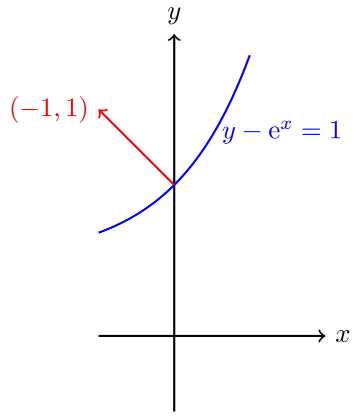
Lösning:

$$f(x, y) = y - \mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow y = 1 + e^x.$$

$f(0, 2) = 2 - e^0 = 2 - 1 = 1$, så $(0, 2)$ ligger på kurvan.

$$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (-\mathrm{e}^x, 1).$$

$$\nabla f(0, 2) = (-1, 1).$$



Rekommenderade uppgifter: 2.43

Exempel 5.3. Bestäm ekvationer för tangentlinjen och normallinjen i punkten $(1, 2)$ till kurvan

$$x^3 + y^2 = 5.$$

Lösning:

$$f(x,y) = x^3 + y^2 = 5.$$

$f(1,2) = 5$, så $(1,2)$ ligger på kurvan.

$$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (3x^2, 2y).$$

$$\nabla f(1,2) = (3,4).$$

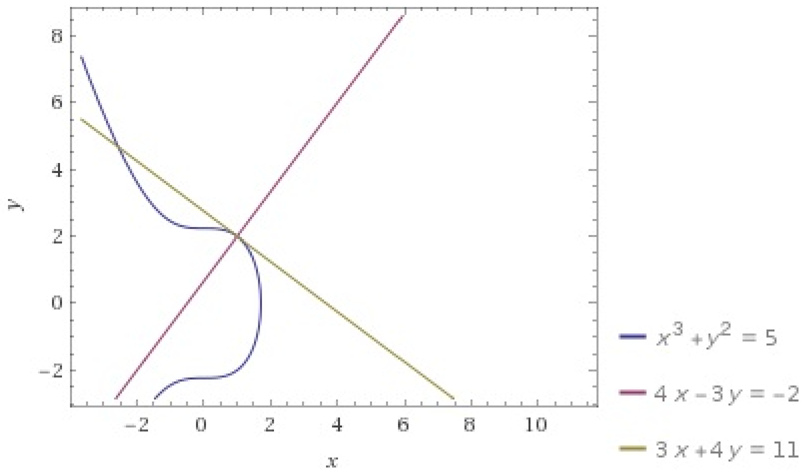
Tangentlinjen ges av

$$\nabla f(1,2) \bullet ((x,y) - (1,2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3,4) \bullet ((x,y) - (1,2)) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y = 11.$$

Eftersom $\nabla f(1,2) = (3,4)$ är en normal till kurvan är $(4,-3)$ en tangent till kurvan (eftersom $(3,4) \bullet (4,-3) = 0$). Så normallinjen ges av

$$(4,-3) \bullet ((x,y) - (1,2)) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y = -2.$$



Rekommenderade uppgifter: 2.44, 2.45

Exempel 5.4. Bestäm vinkeln mellan kurvorna

$$x^2 + y^2 = 4$$

och

$$y - x = 2$$

i $(0,2)$.

Lösning: Låt $f(x,y) = x^2 + y^2$ och $g(x,y) = y - x$.

$f(0,2) = 4$ och $g(0,2) = 2$, så punkten $(0,2)$ ligger på båda kurvorna.

$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (2x, 2y)$, $\nabla f(0,2) = (0,4)$.

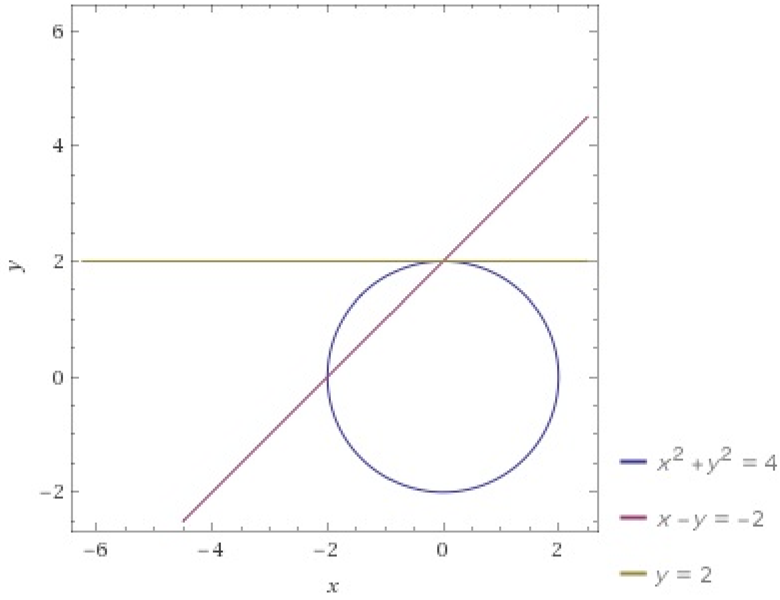
$\nabla g = (g'_x, g'_y) = (-1,1)$.

Vinkeln mellan två kurvor i en punkt är per definition vinkeln mellan deras tangentlinjer, vilket är samma som vinkeln mellan deras normalvektorer.

D.v.s. den sökta vinkeln är vinkeln θ mellan $\bar{u} = (0,4)$ och $\bar{v} = (-1,1)$.

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{(0,4) \bullet (-1,1)}{|(0,4)||(-1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$



Rekommenderade uppgifter: 2.46

Exempel 5.5. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan

$$x^3 + y - z^4 = 1$$

i $(1, 1, 1)$.

Lösning: Låt $f(x, y, z) = x^3 + y - z^4$.
$f(1, 1, 1) = 1$ så punkten $(1, 1, 1)$ ligger på ytan.
$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (3x^2, 1, -4z^3)$, $\nabla f(1, 1, 1) = (3, 1, -4)$.

$$(3, 1, -4) \bullet ((x, y, z) - (1, 1, 1)) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 4z = 0$$

är ekvationen för tangentplanet i $(1, 1, 1)$.

Rekommenderade uppgifter: 2.49

Exempel 5.6. Beräkna riktningsderivatan av

$$f(x, y, z) = xy + xe^z$$

i punkten $(2, 1, 0)$ i riktning $(1, 2, 4)$.

Lösning:

$$f(x, y, z) = xy + xe^z$$

OBS! Normera riktningen:

$$\bar{v} = \frac{(1, 2, 4)}{|(1, 2, 4)|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(1, 2, 4).$$

$$f'_{\bar{v}} = \nabla f \bullet \bar{v},$$

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (y + e^z, x, xe^z),$$

$$\nabla f(2, 1, 0) = (2, 2, 2).$$

$$f'_{\bar{v}}(2, 1, 0) = (2, 2, 2) \bullet \frac{1}{\sqrt{21}}(1, 2, 4) = \frac{2 + 4 + 8}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Rekommenderade uppgifter: 2.55, 2.56, 2.57ab, 2.58

Extrauppgifter: 2.48, 2.50, 2.51, 2.52, 2.59, 2.60

6 Taylors formel. Lokala extrempunkter

Exempel 6.1. Avgör utgående från definitionen om följande funktioner har en lokal extrempunkt i origo:

(a) $f(x, y) = 1 - |xy| - x^2y^2$,

(b) $f(x, y) = 1 + x^2 - y^4$.

Lösning (a):

$$f(x, y) = 1 - |xy| - x^2y^2.$$
$$f(0, 0) = 1.$$

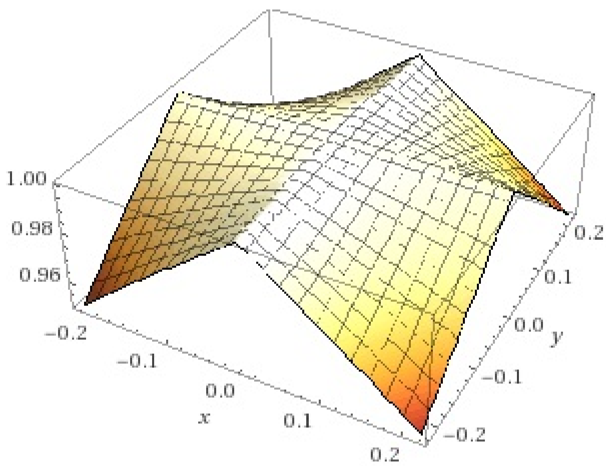
Eftersom $|xy|$ och x^2y^2 aldrig är negativa ser vi att

$$f(x, y) \leq 1$$

för alla (x, y).

Per definition är därför $(0, 0)$ ett lokalt (t.o.m. globalt) maximum.

Notera dock att eftersom $f(0, y) = f(x, 0) = 1$ för alla x, y är det inget strängt max.



Lösning (b):

$$f(x, y) = 1 + x^2 - y^4$$
$$f(0, 0) = 1.$$

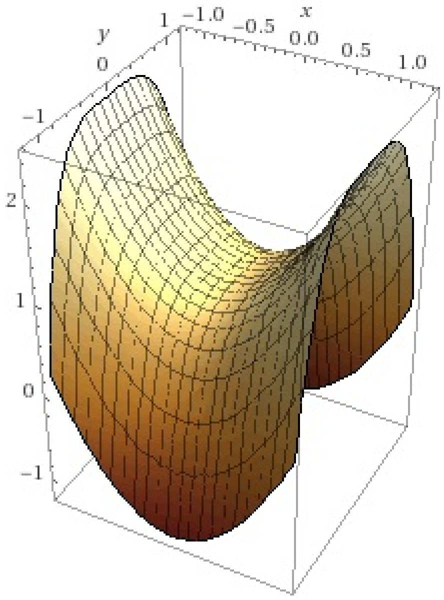
Eftersom

$$f(x, 0) = 1 + x^2 > 1 \text{ om } x \neq 0,$$

och

$$f(0, y) = 1 - y^4 < 1 \text{ om } y \neq 0$$

så ser vi att $f(x, y)$ varken har lokalt max eller min i $(0, 0)$.



Rekommenderade uppgifter: 2.62abcdefg

Exempel 6.2. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 2 med ordorestterm till

$$f(x,y) = (x^2 - y + 1)\sin(x+y),$$

(a) utgående från formeln för Maclaurinutvecklingar,

(b) genom att utnyttja utvecklingen för $\sin t$ från envariabelanalysen.

Lösning (a):

$$f(x,y) = (x^2 - y + 1)\sin(x+y).$$

$$\begin{array}{rrcl} (*) & f(x,y) & = & f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \\ & & + & \dfrac{f''_{xx}(0,0)}{2}x^2 + f''_{xy}(0,0)xy + \dfrac{f''_{yy}(0,0)}{2}y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^3). \end{array}$$

$$\begin{gathered} f(0,0) = 0, \\ f'_x = 2x\sin(x+y) + (x^2 - y + 1)\cos(x+y), \quad f'_x(0,0) = 1, \\ f'_y = -\sin(x+y) + (x^2 - y + 1)\cos(x+y), \quad f'_y(0,0) = 1, \\ f''_{xx} = 2\sin(x+y) + 4x\cos(x+y) - (x^2 - y + 1)\sin(x+y), \quad f''_{xx}(0,0) = 0, \\ f''_{xy} = 2x\cos(x+y) - \cos(x+y) - (x^2 - y + 1)\sin(x+y), \quad f''_{xy}(0,0) = -1, \\ f''_{yy} = -2\cos(x+y) - (x^2 - y + 1)\sin(x+y), \quad f''_{yy}(0,0) = -2. \end{gathered}$$

Insatt i $(*)$ får vi:

$$f(x,y) = x + y - xy - y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^3).$$

Lösning (b):

$$f(x,y) = (x^2 - y + 1)\sin(x+y), \quad \sin t = t + \mathcal{O}(t^3).$$

Med $t = x + y$ får vi:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x^2 - y + 1)((x+y) + \mathcal{O}((x+y)^3)) \\ &= x^3 + x^2y - xy - y^2 + x + y + \mathcal{O}(|(x,y)|^3) \\ &= x + y - xy - y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^3). \end{aligned}$$

(Vi använde ovan bl.a. att

$$\mathcal{O}((x+y)^3) = b(x+y)(x+y)^3$$
$$= b(x+y)\frac{(x+y)^3}{|(x,y)|^3}|(x,y)|^3 = k(x,y)|(x,y)|^3,$$

och $k(x,y)$ är begränsad nära origo.)

Rekommenderade uppgifter: 2.64ac

Exempel 6.3. Taylorutveckla

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+2y}$$

kring $(1,1)$ till ordning 2 med felterm på ordoform.

Lösning:

$$(*) \qquad f(1+h,1+k) = f(1,1) + f'_x(1,1)h + f'_y(1,1)k +$$
$$+ \quad \frac{f''_{xx}(1,1)}{2}h^2 + f''_{xy}(1,1)hk + \frac{f''_{yy}(1,1)}{2}k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3).$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \mathrm{e}^{x+2y}. \\ f(1,1) &= \mathrm{e}^3, \\ f'_x &= \mathrm{e}^{x+2y}, \quad f'_x(1,1) = \mathrm{e}^3, \\ f'_y &= 2\mathrm{e}^{x+2y}, \quad f'_y(1,1) = 2\mathrm{e}^3, \\ f''_{xx} &= \mathrm{e}^{x+2y}, \quad f''_{xx}(1,1) = \mathrm{e}^3, \\ f''_{xy} &= 2\mathrm{e}^{x+2y}, \quad f''_{xy}(1,1) = 2\mathrm{e}^3, \\ f''_{yy} &= 4\mathrm{e}^{x+2y}, \quad f''_{yy}(1,1) = 4\mathrm{e}^3. \end{aligned}$$

Insatt i $(*)$:

$$f(1+h,1+k) = \mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^3h + 2\mathrm{e}^3k + \frac{\mathrm{e}^3}{2}h^2 + 2\mathrm{e}^3hk + 2\mathrm{e}^3k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3),$$

alternativt om vi föredrar att svara med x, y:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \mathrm{e}^3 + \mathrm{e}^3(x-1) + 2\mathrm{e}^3(y-1) + \\ &+ \frac{\mathrm{e}^3}{2}(x-1)^2 + 2\mathrm{e}^3(x-1)(y-1) + 2\mathrm{e}^3(y-1)^2 \\ &+ \mathcal{O}(|(x-1,y-1)|^3). \end{aligned}$$

Rekommenderade uppgifter: 2.65

Exempel 6.4. Avgör teckenkaraktären till

(a) $Q(h,k) = h^2 + 4hk + k^2$,

(b) $Q(h,k,l) = h^2 + 2hk + 2k^2 + 2hl + 3l^2$.

Lösning (a), alternativ 1:

$$h^2 + 4hk + k^2 = (h + 2k)^2 - 4k^2 + k^2 = (h + 2k)^2 - 3k^2.$$

$Q(h, k)$ är indefinit, d.v.s tar både positiva och negativa värden.
Lösning (a), alternativ 2:

$$h^2 + 4hk + k^2 = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

Ger värdena $\lambda = 3$ och $\lambda = -1$.

Så $Q(h, k)$ är indefinit, d.v.s tar både positiva och negativa värden.
Lösning (b):

$$\begin{aligned} &h^2 + 2hk + 2k^2 + 2hl + 3l^2 = \\ &= (h + k + l)^2 - k^2 - 2kl - l^2 + 2k^2 + 3l^2 \\ &= (h + k + l)^2 + k^2 - 2kl + 2l^2 \\ &= (h + k + l)^2 + (k - l)^2 - l^2 + 2l^2 \\ &= (h + k + l)^2 + (k - l)^2 + l^2. \end{aligned}$$

Så $Q(h, k, l)$ är positivt definit, eftersom $Q(h, k, l) > 0$ om $(h, k, l) \neq (0, 0, 0)$.

Rekommenderade uppgifter: 2.66

Exempel 6.5. Avgör om

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - x^2 z$$

har ett lokalt maximum eller minimum i $(0, 0, 0)$.

Lösning:

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - x^2 z.$$

$$f(0, 0, 0) = 0.$$

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (2x + 2z - 2xz, 2y, 2x + 4z - x^2),$$

$$\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

Alltså är $(0, 0, 0)$ en kritisk punkt (annars hade svaret på frågan direkt varit att det inte kan vara lokalt max/min).

Vi undersöker nu teckenkaraktären på andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen:

$$f''_{xx} = 2 - 2z,\ f''_{xx}(0, 0, 0) = 2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = 2,$$

$$f''_{xz} = 2 - 2x,\ f''_{xz}(0, 0, 0) = 2,\ f''_{yz} = 0,\ f''_{zz} = 4.$$

Andragradstermerna i Maclaurinutvecklingen ges av (med $\bar{0} = (0, 0, 0)$)

$$\frac{f''_{xx}(\bar{0})}{2} x^2 + f''_{xy}(\bar{0}) xy + f''_{xz}(\bar{0}) xz + \frac{f''_{yy}(\bar{0})}{2} y^2 + f''_{yz}(\bar{0}) yz + \frac{f''_{zz}(\bar{0})}{2} z^2$$

$$= x^2 + y^2 + 2xz + 2z^2 = (x + z)^2 + y^2 + z^2.$$

Eftersom denna alltså är positivt definit har vi ett lokalt minimum i $(0, 0, 0)$.

(OBS! I detta fall kunde vi, då vi ska Maclaurinutveckla ett polynom, läst av utvecklingen direkt genom att kasta bort högre ordnings termer. D.v.s. vi har $x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 - x^2 z = x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2 + \mathcal{O}(|(x, y, z)|^3)$, så $x^2 + 2xz + y^2 + 2z^2$ är andra ordningens Maclaurinpolynom till f.)

Rekommenderade uppgifter: 2.68ac, 2.69

Exempel 6.6. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x,y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3.$$

Lösning:

$$f(x,y) = 6xy - 3y^2 - 2x^3.$$
$$\nabla f = (6y - 6x^2, 6x - 6y).$$
$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6y - 6x^2 = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ x - x^2 = 0. \end{array} \right.$$

Vi har alltså de två kritiska punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$.

$(0,0)$:

$$f''_{xx}(0,0) = \ldots = 0, \quad f''_{xy}(0,0) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(0,0) = \ldots = -6.$$

Eftersom $f(0,0) = 0$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$\begin{aligned} f(h,k) &= \frac{f''_{xx}(0,0)}{2}h^2 + f''_{xy}(0,0)hk + \frac{f''_{yy}(0,0)}{2}k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3) \\ &= 6hk - 3k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3) = -3(h-k)^2 + 3h^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3). \end{aligned}$$

Eftersom andragradsformen i detta uttryck är indefinit är detta ingen extrempunkt.

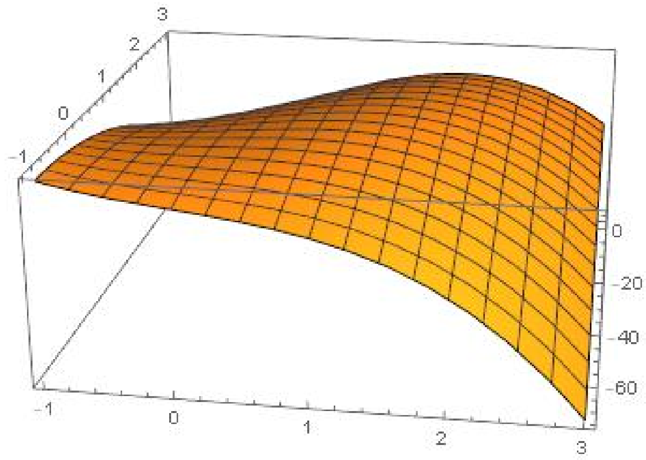
$(1,1)$:

$$f''_{xx}(1,1) = \ldots = -12, \quad f''_{xy}(1,1) = \ldots = 6, \quad f''_{yy}(1,1) = \ldots = -6.$$

Eftersom $f(1,1) = 1$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$\begin{aligned} &f(1+h, 1+k) = f(1,1) + \frac{f''_{xx}(1,1)}{2}h^2 + f''_{xy}(1,1)hk + \frac{f''_{yy}(1,1)}{2}k^2 \\ &+\mathcal{O}(|(h,k)|^3) \\ &= 1 - 6h^2 + 6hk - 3k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3) = \\ &1 - 3(h-k)^2 - 3h^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3). \end{aligned}$$

Eftersom andragradsformen i detta uttryck är negativt definit är detta ett lokalt max.



SVAR: f har ett lokalt max i $(1,1)$, f saknar lokala min.

Exempel 6.7. Avgör var

$$f(x,y) = y\mathrm{e}^{x^2-3y^2}$$

har lokala extrempunkter, samt avgör om det (eventuellt) rör sig om ett maximum eller minimum.

Lösning:

$$f(x,y) = y\mathrm{e}^{x^2-3y^2}.$$

$$\nabla f = (2xy\mathrm{e}^{x^2-3y^2}, (1-6y^2)\mathrm{e}^{x^2-3y^2}).$$

$$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ 1-6y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1/\sqrt{6}. \end{cases}$$

Vi har alltså de två kritiska punkterna $(0, 1/\sqrt{6})$ och $(0, -1/\sqrt{6})$.

$(0, 1/\sqrt{6})$:

$$f''_{xx}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2},$$

$$f''_{xy}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = 0,$$

$$f''_{yy}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = -2\sqrt{6}\mathrm{e}^{-1/2}.$$

Eftersom $f(0, 1/\sqrt{6}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2}$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$\begin{aligned}
&f(h, 1/\sqrt{6}+k) = f(0, 1/\sqrt{6}) \\
&+\frac{f''_{xx}(0,1/\sqrt{6})}{2}h^2 + f''_{xy}(0,1/\sqrt{6})hk + \frac{f''_{yy}(0,1/\sqrt{6})}{2}k^2 \\
&+\mathcal{O}(|(h,k)|^3) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2} + \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{6}}h^2 - \sqrt{6}k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3).
\end{aligned}$$

Eftersom andragradsformen i detta uttryck är indefinit är detta en sadelpunkt.

$(0, -1/\sqrt{6})$:

$$f''_{xx}(0, -1/\sqrt{6}) = \ldots = -\frac{2}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2},$$

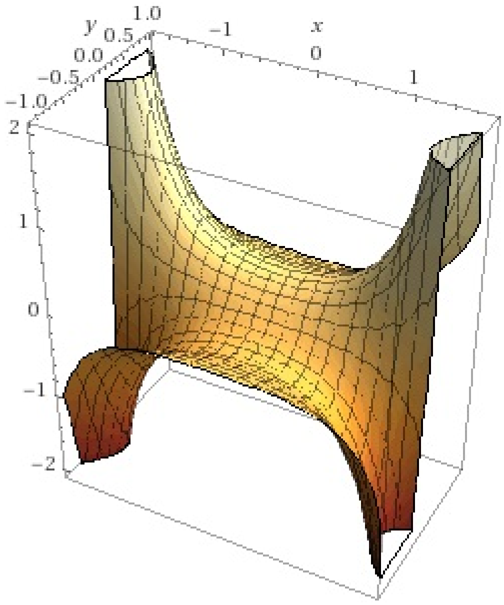
$$f''_{xy}(0, 1/\sqrt{6}) = \ldots = 0,$$

$$f''_{yy}(0, -1/\sqrt{6}) = \ldots = 2\sqrt{6}\mathrm{e}^{-1/2}.$$

Eftersom $f(0, -1/\sqrt{6}) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2}$ får vi (eftersom förstaderivatorna är noll)

$$\begin{aligned}
&f(h, -1/\sqrt{6}+k) = f(0, -1/\sqrt{6}) \\
&+\frac{f''_{xx}(0,-1/\sqrt{6})}{2}h^2 + f''_{xy}(0,-1/\sqrt{6})hk + \frac{f''_{yy}(0,-1/\sqrt{6})}{2}k^2 \\
&+\mathcal{O}(|(h,k)|^3) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{e}^{-1/2} - \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{\sqrt{6}}h^2 + \sqrt{6}k^2 + \mathcal{O}(|(h,k)|^3).
\end{aligned}$$

Eftersom andragradsformen i detta uttryck är indefinit är detta en sadelpunkt.



SVAR: f saknar lokala extrempunkter.

Rekommenderade uppgifter: 2.70abcdgh

Extrauppgifter: 2.62hi, 2.63, 2.67, 2.70efij, 2.71, 2.73, 2.74

7 Kurvor. Ytor. Funktionaldeterminanter. Inversa Funktioner

Exempel 7.1. Beskriv kurvan

$$\begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = t^2 + 7t \quad -1 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Ange även en tangentvektor till kurvan i $(x, y) = (3, 0)$.

Lösning:

$$\begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = t^2 + 7t \quad -1 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

$$t = \frac{x-3}{2},$$

$$y = t^2 + 7t = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + \frac{7(x-3)}{2} = \frac{x^2 + 8x - 33}{4}.$$

Eftersom $2t + 3$ är växande betyder detta att kurvan är grafen till ovanstående funktion, med start i $(1, -6)$ och slut i $(9, 30)$. Punkten $(3, 0)$ svarar mot $t = 0$.

$$\bar{r}(t) = (2t + 3, t^2 + 7t), \quad \bar{r}'(t) = (2, 2t + 7).$$

Så

$$\bar{r}'(0) = (2, 7)$$

är en tangentvektor i $(3, 0)$.

Notera att det bara är i enkla fall vi kan göra om en kurva till en graf för en funktion av en av variablerna.

Notera dock att beräkningen av tangentvektorn inte kräver detta.

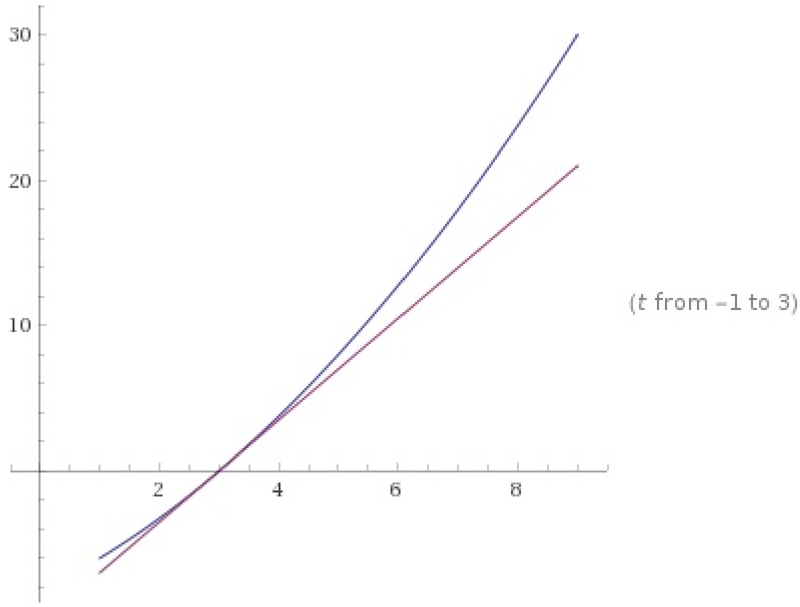
Om vi vill skissa kurvan kan vi helt enkelt räkna ut $(x(t), y(t))$ för tillräckligt många värden på t, sätta ut dessa punkter i xy-planet och skarva mellan dem.

T.ex. om vi bara tar heltalspunkterna $t = -1, 0, 1, 2, 3$ i detta fall får vi att

$$(x(-1), y(-1)) = (1, -6),\ ((x(0), y(0)) = (3, 0),$$

$$((x(1), y(1)) = (5, 8),\ (x(2), y(2)) = (7, 18),\ (x(3), y(3)) = (9, 30)$$

ligger på kurvan.



> *Rekommenderade uppgifter: 3.1ac, 3.2ac*

Exempel 7.2. En yta i $\mathbb{R}^3$ parametriseras av

$$\begin{cases} x = s^2 + t^2, \\ y = st, \\ z = s^2 - t^2. \end{cases}$$

Bestäm tangentplanet genom den punkt som svarar mot $(s, t) = (1, 1)$.

Lösning:

$$\begin{cases} x = s^2 + t^2, \\ y = st, \\ z = s^2 - t^2. \end{cases}$$

$$\bar{f}(s,t) = \begin{pmatrix} f_1(s,t) \\ f_2(s,t) \\ f_3(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 + t^2 \\ st \\ s^2 - t^2 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s} & \frac{\partial f_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s & 2t \\ t & s \\ 2s & -2t \end{pmatrix}.$$

Plan på parameterform:

$$\bar{f}(1+h,1+k) = \bar{f}(1,1) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial(s,t)}(1,1)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \bar{\psi}(h,k)|(h,k)|,$$

där $\bar{\psi}(h,k) \to (0,0)$ då $(h,k) \to (0,0)$.

$$\bar{f}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial(s,t)}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Plan på normalform

$$(2,1,2) \times (2,1,-2) = (-4,8,0) = -4(1,-2,0).$$

$$(1,-2,0) \bullet ((x,y,z) - (2,1,0)) = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

Rekommenderade uppgifter: 3.4

Exempel 7.3. Låt

$$\begin{cases} x = t^2 \mathrm{e}^{\psi} \\ y = t\psi. \end{cases}$$

Bestäm funktionalmatrisen $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(t,\psi)}$ och funktionaldeterminanten $\dfrac{d(x,y)}{d(t,\psi)}$.

Visa även att $(t,\psi) \mapsto (x,y)$ har en $\mathcal{C}^1$-invers i någon omgivning till $(t,\psi) = (1,1)$.

Lösning:

$$\begin{cases} x = t^2 \mathrm{e}^{\psi} \\ y = t\psi. \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\psi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t\mathrm{e}^{\psi} & t^2\mathrm{e}^{\psi} \\ \psi & t \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d(x,y)}{d(t,\psi)} = \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\psi)} = 2t^2\mathrm{e}^{\psi} - t^2\psi\mathrm{e}^{\psi}.$$

Eftersom funktionerna är av klass $\mathcal{C}^1$ och

$$\frac{d(x,y)}{d(t,\psi)}(1,1) = 2 \cdot 1^2 \cdot \mathrm{e}^1 - 1^2 \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e} - \mathrm{e} = \mathrm{e} \neq 0$$

ger inversa funktionssatsen att avbildningen är lokalt inverterbar.

Rekommenderade uppgifter: 3.6

Exempel 7.4. Låt

$$\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = \sin z \\ w = xyz. \end{cases}$$

Bestäm funktionalmatrisen $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ och funktionaldeterminanten $\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$.

Visa även att $(x,y,z) \mapsto (u,v,w)$ har en $\mathcal{C}^1$-invers i någon omgivning till $(x,y,z) = (1,1,\pi)$.

Lösning:

$$\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = \sin z \\ w = xyz. \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \det \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = -\cos z(2x^2 z - yz).$$

Eftersom funktionerna är av klass $\mathcal{C}^1$ och

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}(1,1,\pi) = \pi \neq 0$$

ger inversa funktionssatsen att avbildningen är lokalt inverterbar med $\mathcal{C}^1$ invers.

Rekommenderade uppgifter: 3.7, 3.8, 3.9ab, 3.10, 3.11

Extrauppgifter: 3.9c

8 Implicita funktionssatsen

Exempel 8.1. Visa att ekvationen

$$x^4 + 3x^2y^2 = 13$$

lokalt i någon omgivning till $(x,y) = (1,2)$ bestämmer x unikt som funktion av y (d.v.s. lokalt är kurvan en graf $x = x(y)$).

Beräkna även $x'(2)$ och $x''(2)$ för denna funktion.

Lösning:

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 - 13 = 0.$$

$$f(1,2) = 0 \quad \text{OK.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 28 \neq 0.$$

Implicita funktionssatsen ger nu att $x = x(y)$ lokalt på kurvan kring $(1,2)$.

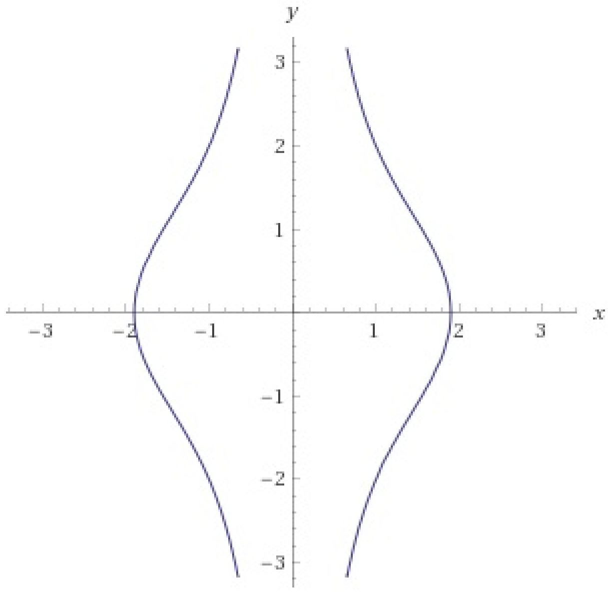
$$\frac{d}{dy} f(x(y), y) = \frac{d}{dy}(x(y)^4 + 3x(y)^2y^2 - 13)$$

$$= 4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y = 0. \quad (*)$$

Att $(1,2)$ ligger på kurvan betyder att $x(2) = 1$. Insatt ovan får vi:

$$4x(2)^3x'(2) + 6x(2)x'(2)\cdot 2^2 + 6x(2)^2 \cdot 2 = 4x'(2) + 24x'(2) + 12 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x'(2) = -12/28 = -3/7.$$



För att räkna ut $x''(2)$ deriverar vi ekvationen $(*)$ ovan en gång till:

$$\frac{d}{dy}(4x(y)^3x'(y) + 6x(y)x'(y)y^2 + 6x(y)^2y) = 0.$$

Detta ger

$$4x(y)^3x''(y) + 12x(y)^2x'(y)^2 + 6x(y)x''(y)y^2 + 6x'(y)^2y^2 + 12x(y)x'(y)y + 12x(y)x'(y)y + 6x(y)^2 = 0.$$

Om vi då sätter in $x = 1, y = 2$ och $x'(2) = -3/7$ får vi ekvationen

$$4x''(2) + 12 \cdot \left(\frac{-3}{7}\right)^2 + 6x''(2) \cdot 2^2 + 6 \cdot \left(\frac{-3}{7}\right)^2 \cdot 2^2 + 24 \cdot \left(\frac{-3}{7}\right) \cdot 2 + 6 = 0.$$

Detta ger nu

$$x''(2) = 195/686.$$

Rekommenderade uppgifter: 3.12, 3.13

Exempel 8.2. Visa att ekvationen

$$xz - x^2y = \mathrm{e}^z - 1$$

lokalt i någon omgivning till $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ bestämmer z unikt som funktion av (x, y) (d.v.s. lokalt är ytan en graf $z = z(x, y)$).

Beräkna även z'_x och z'_y för denna funktion.

Lösning:

$$f(x, y, z) = xz - x^2y - \mathrm{e}^z + 1 = 0.$$

$$f(0, 0, 0) = 0 \quad \text{OK.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x - \mathrm{e}^z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = -1 \neq 0.$$

Implicita funktionssatsen ger nu att $z = z(x, y)$ lokalt på ytan kring $(0, 0, 0)$.

$$f(x, y, z) = xz - x^2y - \mathrm{e}^z + 1 = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\Leftrightarrow z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} = -\frac{z-2xy}{x-\mathrm{e}^z}.$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$
$$\Leftrightarrow z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z} = \frac{x^2}{x-\mathrm{e}^z}.$$

Rekommenderade uppgifter: 3.15

Exempel 8.3. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ xyz=1 \end{cases}$$

lokalt i någon omgivning till $(x,y,z) = (1,1,1)$ bestämmer $\mathcal{C}^1$ funktioner $x(y)$ och $z(y)$ unikt (d.v.s. lokalt är kurvan given av $(x(y), y, z(y))$).

Beräkna även $x'(1)$ och $z'(1)$ för dessa funktioner.

Lösning:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x+2y+3z-6 = 0 \\ f_2(x,y,z) = xyz-1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(1,1,1) = 0 \\ f_2(1,1,1) = 0 \end{cases} \quad \text{OK.}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ yz & xy \end{vmatrix} = xy - 3yz.$$

I $(1,1,1)$ får vi värdet $1-3=-2 \neq 0$ på determinanten, så implicita funktionssatsen ger existens av de efterfrågade funktionerna.

$x = x(y)$ och $z = z(y)$ insatt i ekvationssystemet ger

$$\begin{cases} x(y)+2y+3z(y) = 6 \\ x(y)yz(y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(y)+2+3z'(y) = 0 \\ x'(y)yz(y)+x(y)z(y)+x(y)yz'(y) = 0 \end{cases}$$

Att $(1,1,1)$ ligger på kurvan betyder att $x(1)=1$ och $z(1)=1$:

$$\begin{cases} x'(1)+2+3z'(1) = 0 \\ x'(1)\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot z'(1) = 0 \end{cases}$$

Detta ger $x'(1) = -1/2$ och $z'(1) = -1/2$.

Rekommenderade uppgifter: 3.19, 3.20

Extrauppgifter: 3.14, 3.16, 3.17, 3.18

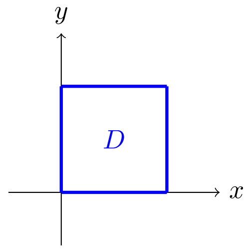
9 Dubbelintegraler

Exempel 9.1. Visa att

$$0 \leq \iint_D \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y} \leq \frac{31}{20}$$

där $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

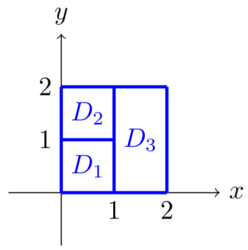
Lösning: Låt $f(x, y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.



Eftersom $0 \leq f(x, y) \leq 2/(6 - 2 \cdot 2) = 1$, gäller på D får vi

$$\iint_D 0 dx dy = 0 \leq \iint_D \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y} \leq \iint_D 1 dx dy = 4.$$

Detta är dock inte bra nog för den övre uppskattningen ...



$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3.$$

Eftersom D_i:a bara skär varandra på en mängd med area noll gäller:

$$\iint_D \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y} =$$

$$\iint_{D_1} \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y} + \iint_{D_2} \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y} + \iint_{D_3} \frac{x dx dy}{6 + 3x^2 - 2y}.$$

Låt $f(x, y) = \frac{x}{6+3x^2-2y}$.
På D_1 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$ här, $f(x, y) \leq 1/(6 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = 1/4$.
På D_2 gäller, eftersom $0 \leq x \leq 1$ och $1 \leq y \leq 2$ här, $f(x, y) \leq 1/(6 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = 1/2$.
På D_3 gäller, eftersom $1 \leq x \leq 2$ och $0 \leq y \leq 2$ här, $f(x, y) \leq 2/(6 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = 2/5$.
Alltså får vi att

$$I = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy + \iint_{D_3} f(x, y) dx dy$$

$$I \leq \frac{1}{4} \cdot m(D_1) + \frac{1}{2} \cdot m(D_2) + \frac{2}{5} \cdot m(D_3)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{31}{20}.$$

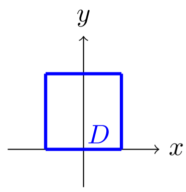
Rekommenderade uppgifter: *6.1*

Exempel 9.2. Beräkna

$$\iint_D 3x^2y\,dxdy$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

Lösning:



$$\iint_D 3x^2ydxdy = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 3x^2ydx\right) dy =$$
$$\int_0^2 \left[x^3y\right]_{x=-1}^1 dy =$$
$$\int_0^2 (y-(-y))dy = \left[y^2\right]_0^2 = 4.$$

Alternativt:

$$\iint_D 3x^2ydxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 3x^2ydy\right) dx =$$
$$\int_{-1}^1 \left[\frac{3x^2y^2}{2}\right]_{y=0}^2 dx =$$
$$\int_{-1}^1 (6x^2)dx = \left[2x^3\right]_{-1}^1 = 4.$$

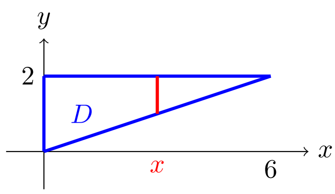
Rekommenderade uppgifter: *6.2*

Exempel 9.3. Beräkna

$$\iint_D (6x^2y + 2y)\,dxdy$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3y \leq 6\}$.

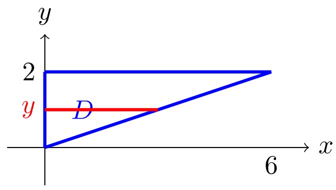
Lösning: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3y \leq 6\}$.



$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 6, \frac{x}{3} \le y \le 2\}.$$

$$\iint_D (6x^2y + 2y)dxdy = \int_0^6 \left(\int_{x/3}^2 (6x^2y+2y)dy\right) dx =$$
$$\int_0^6 \left[3x^2y^2 + y^2\right]_{y=x/3}^2 dx =$$
$$\int_0^6 \left(12x^2 + 4 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^2}{9}\right) dx = \left[4x^3 + 4x - \frac{x^5}{15} - \frac{x^3}{27}\right]_0^6 = \frac{1808}{5}.$$

Alternativt:
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3y \le 6\}$.



$$D = \{(x,y) : 0 \le y \le 2, 0 \le x \le 3y\}.$$

$$\iint_D (6x^2y + 2y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{3y} (6x^2y+2y)dx\right) dy =$$
$$\int_0^2 \left[2x^3y + 2xy\right]_{x=0}^{3y} dy =$$
$$\int_0^2 \left(54y^4 + 6y^2\right) dy = \left[\frac{54y^5}{5} + 2y^3\right]_0^2 = \frac{1808}{5}.$$

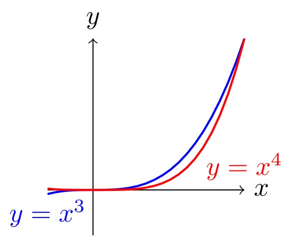
Rekommenderade uppgifter: 6.3, 6.4

Exempel 9.4. Beräkna

$$\iint_D 5xy^4\, dxdy$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \le y \le x^3\}$.

Lösning: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \le y \le x^3\}$.



$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x^4 \le y \le x^3\}.$$

$$\iint_D 5xy^4 dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^4}^{x^3} 5xy^4 dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy^5 \right]_{y=x^4}^{x^3} dx =$$

$$\int_0^1 \left(x \cdot x^{15} - x \cdot x^{20} \right) dx = \left[\frac{x^{17}}{17} - \frac{x^{22}}{22} \right]_0^1 = \frac{5}{374}.$$

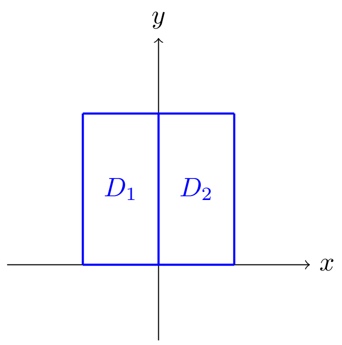
Rekommenderade uppgifter: 6.5

Exempel 9.5. Beräkna

$$\iint_D |xy| \, dxdy$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

Lösning: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.



$$D = D_1 \cup D_2 =$$
$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2\} \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$$

På D_1 gäller $|xy| = -xy$ och på D_2 gäller $|xy| = xy$.

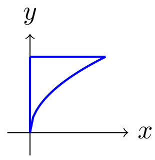
$$\iint_D |xy| dxdy = \iint_{D_1} |xy| dxdy + \iint_{D_2} |xy| dxdy =$$
$$\iint_{D_1} (-xy) dxdy + \iint_{D_2} xy dxdy =$$
$$\int_0^2 \left(\int_{-1}^0 (-xy) dx \right) dy + \int_0^2 \left(\int_0^1 xy dx \right) dy =$$
$$= -\int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=-1}^0 dy + \int_0^2 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=0}^1 dy =$$
$$-\int_0^2 -\frac{y}{2} dy + \int_0^2 \frac{y}{2} dy = \ldots = 2.$$

Rekommenderade uppgifter: 6.6

Exempel 9.6. Beräkna

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1 + y^3} dy \right) dx.$$

Lösning:



$$\{(x,y): 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1\} = \{(x,y): 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y^2\}.$$

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3} dx \right) dy =$$
$$\int_0^1 \left[x\sqrt{1+y^3} \right]_{x=0}^{y^2} dy = \int_0^1 y^2 \sqrt{1+y^3} dy =$$
$$\Bigg/ \begin{array}{l} t = y^3 \\ dt = 3y^2 dy \\ 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 1 \end{array} \Bigg/ = \int_0^1 \frac{1}{3}\sqrt{1+t} dt =$$
$$\left[\frac{2}{9}(1+t)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}-2}{9}.$$

Rekommenderade uppgifter: 6.8

Exempel 9.7. Beräkna

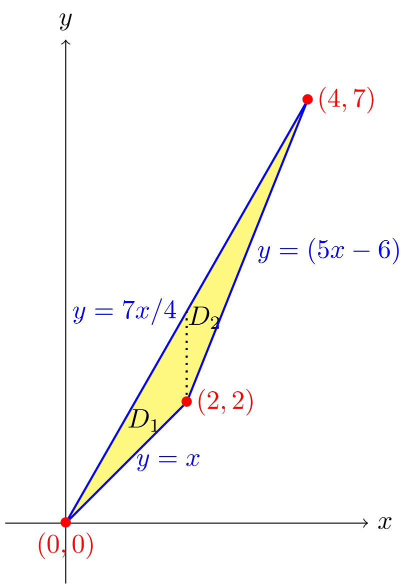
$$\iint_D y dx dy$$

där

(a) D är triangeln med hörn i $(0,0), (2,2)$ och $(4,7)$.

(b) $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 1, x^2 + 4y^2 \ge 1\}$.

Lösning (a):



$$D = D_1 \cup D_2$$

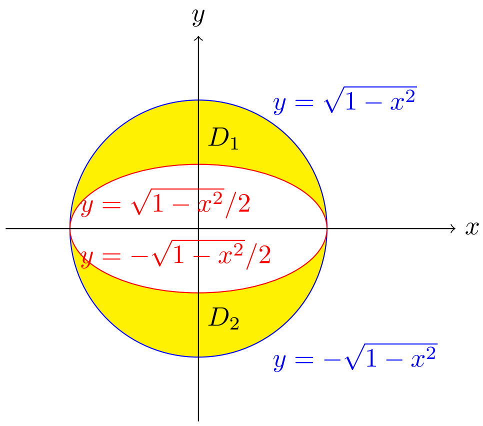
där

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) : 0 \le x \le 2, x \le y \le 7x/4\}, \\ D_2 &= \{(x,y) : 2 \le x \le 4, (5x-6)/2 \le y \le 7x/4\}. \end{aligned}$$

$$\iint_D y dx dy = \iint_{D_1} y dx dy + \iint_{D_2} y dx dy =$$
$$\int_0^2 \left(\int_x^{7x/4} y dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{(5x-6)/2}^{7x/4} y dy \right) dx = \ldots = 9.$$

Lösning (b):

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1, x^2 + 4y^2 \ge 1\}$$



$$D = D_1 \cup D_2$$

där

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ (x,y) : -1 \le x \le 1, \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\}, \\ D_2 &= \left\{ (x,y) : -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \right\}. \end{aligned}$$

$$\iint_D y dx dy = \iint_{D_1} y dx dy + \iint_{D_2} y dx dy =$$
$$\int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}/2}^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}/2} y dy \right) dx = \ldots = 0.$$

Extrauppgifter: 6.7

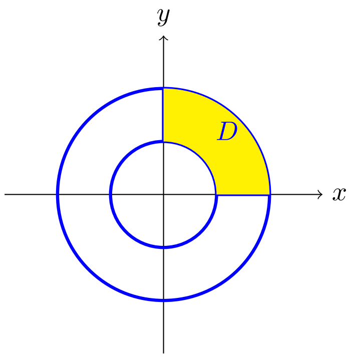
10 Variabelbyten i dubbelintegraler.

Exempel 10.1. Beräkna

$$\iint_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$$

där $D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$.

Lösning: $D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$.



I polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ ges D av att $1 \le \rho \le 2$ och $0 \le \varphi \le \pi/2$.
$dxdy = \rho d\rho d\varphi$.

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_1^2 \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}\rho d\rho\right)d\varphi =$$
$$\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi = [\sin\varphi]_0^{\pi/2} = 1.$$

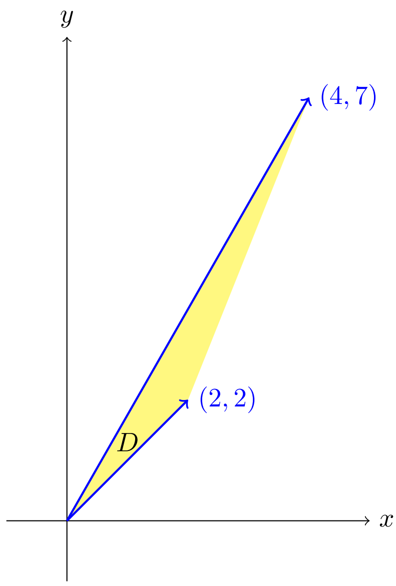
Rekommenderade uppgifter: 6.9

Exempel 10.2. Beräkna

$$\iint_D ydxdy$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0), (2,2)$ och $(4,7)$.

Lösning:



Vi använder $(2,2),(4,7)$ som ny bas.

D.v.s. vi inför nya koordinater (u,v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

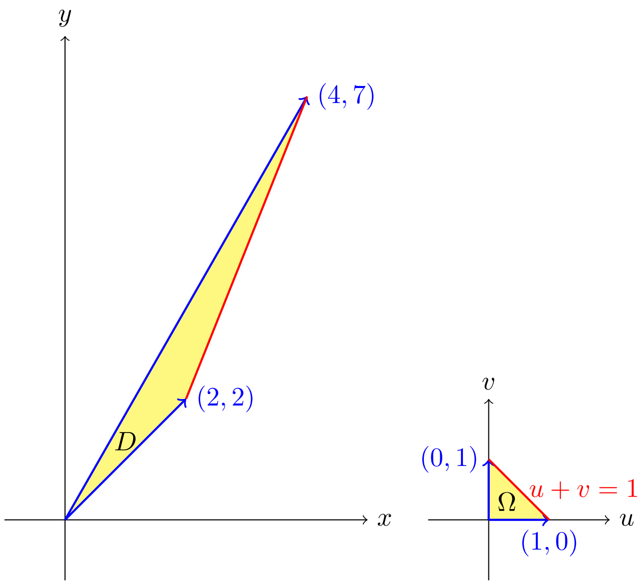
Om vi inverterar detta samband får vi

$$\begin{cases} u &= \frac{7x-4y}{6} \\ v &= \frac{y-x}{3}. \end{cases}$$

Punkterna med koordinater $(0,0),(2,2)$ och $(4,7)$ i xy-planet avbildas via denna transformation på punkterna $(0,0),(1,0)$ respektive $(0,1)$ i uv-planet.

Alltså transformeras D till triangeln Ω i uv-planet med hörn i dessa punkter:

$$\Omega = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1-u\}.$$

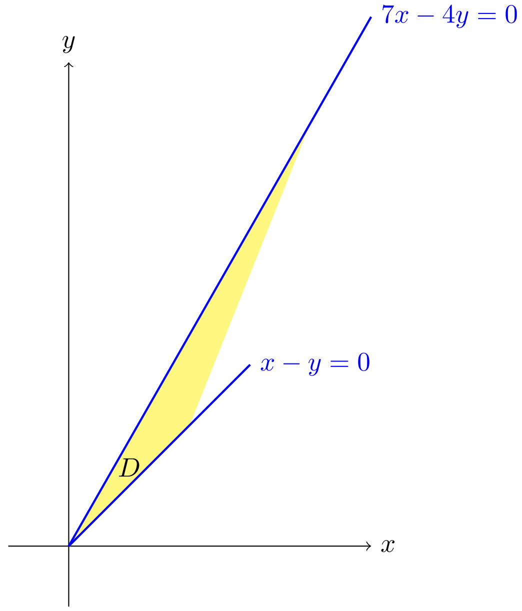


$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = |\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}| dudv = 6 dudv.$$

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_\Omega (2u+7v)6dudv =$$
$$6\int_0^1 \left(\int_0^{1-u}(2u+7v)dv\right)du = 6\int_0^1 \left[2uv+\frac{7v^2}{2}\right]_{v=0}^{1-u} du =$$
$$6\int_0^1 (2u(1-u)+\frac{7(1-u)^2}{2})du = \ldots = 9.$$

Lösning, alternativ 2:

Om man inte vill tänka i termer av vektorer kan vi istället se på följande figur:

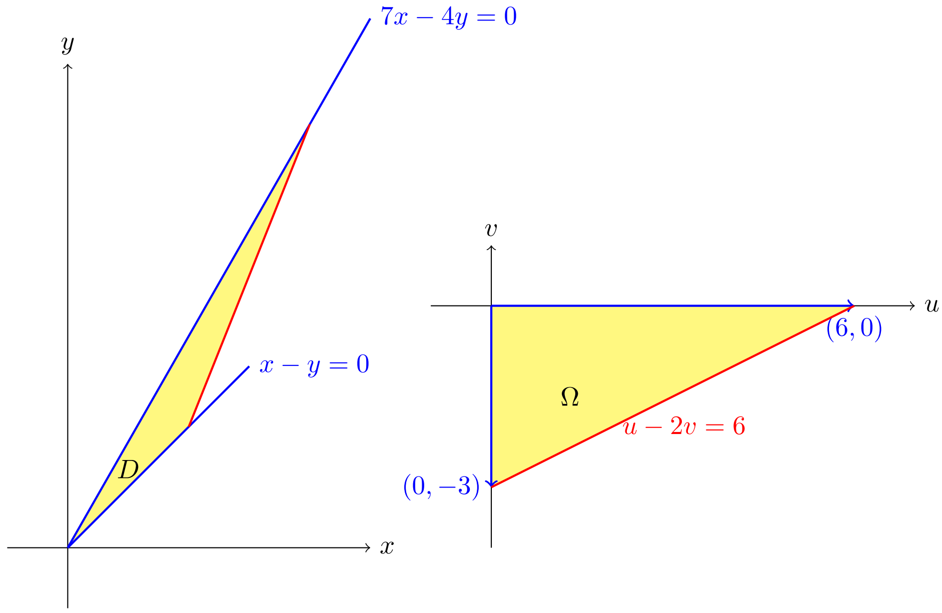


Detta motiverar variabelbytet

$$\begin{cases} u &= 7x-4y \\ v &= x-y, \end{cases}$$

eftersom u respektive v då är noll på varsin sida av triangeln.

När $(x,y)=(2,2)$ blir $(u,v)=(6,0)$ och när $(x,y)=(4,7)$ blir $(u,v)=(0,-3)$ (och när $(x,y)=(0,0)$ är $(u,v)=(0,0)$). Vi får alltså bilden



Skalfaktorn:

$$dxdy = \left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|^{-1} dudv = |\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}|^{-1} dudv = \frac{1}{3} dudv.$$

$$u - 7v = (7x - 4y) - 7(x - y) = 3y \Rightarrow y = \frac{u - 7v}{3}.$$

$$\iint_D y dxdy = \iint_\Omega \frac{u-7v}{3}\frac{1}{3} dudv =$$
$$\frac{1}{9}\int_0^6 \left(\int_{(u-6)/2}^0 (u - 7v)dv\right) du = \ldots = 9.$$

Exempel 10.3. Beräkna

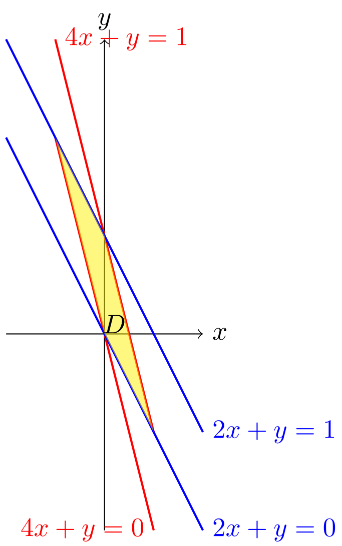
$$\iint_D (4x + y)\sin(2x + y)dxdy$$

där

(a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le 2x + y \le 1, 0 \le 4x + y \le 1\}$.

(b) D är parallellogrammen med hörn i $(0, 0), (1/2, -1), (0, 1)$ och $(-1/2, 2)$.

Lösning (a):



$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le 2x + y \le 1, 0 \le 4x + y \le 1\}$.
Låt $u = 2x + y$, $v = 4x + y$. Då ges området av att $0 \le u \le 1$ och $0 \le v \le 1$.

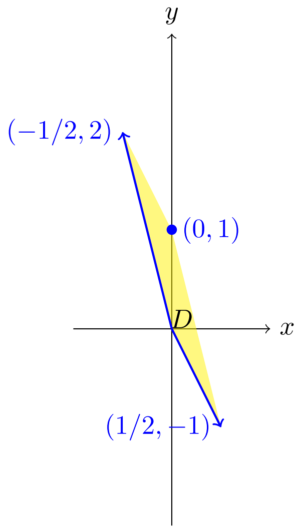
$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2.$$

$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|^{-1} dudv = \frac{1}{2} dudv.$$

Med $\Omega = \{(u, v) : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$ gäller:

$$\iint_D (4x + y)\sin(2x + y)dxdy = \iint_\Omega (v \sin u)\frac{1}{2} dudv =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 v \sin u \, du\right) dv = \frac{1}{2}\int_0^1 [-v\cos u]_{u=0}^1 \, dv =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 v(1 - \cos 1)dv = \frac{1 - \cos 1}{4}.$$

Lösning (b):



Vi vill använda $(-1/2, 2), (1/2, -1)$ som bas. D.v.s. vi vill införa nya koordinater (u, v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Om vi inverterar detta samband får vi

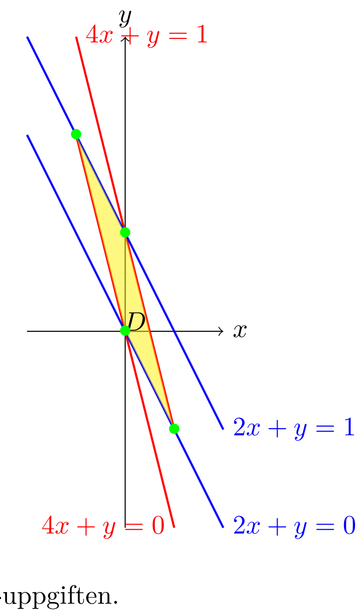
$$\begin{cases} u &= 2x + y \\ v &= 4x + y. \end{cases}$$

Punkterna med koordinater $(0, 0), (1/2, -1), (0, 1)$ och $(-1/2, 2)$ i xy-planet avbildas via denna transformation på punkterna $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ respektive $(1, 0)$ i uv-planet.

Alltså transformeras D till parallellogrammet i uv-planet med hörn i dessa punkter, vilket helt enkelt är området som ges av $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$.

Efter detta kan vi fortsätta som i (a)-uppgiften för att beräkna integralen (som ju alltså är samma som i denna).

Lösning (b), alternativ 2: Om man inte vill använda vektorer kan man istället bestämma linjerna som i nedanstående figur utifrån punkterna som de går igenom:



Sedan fortsätter man som i (a)-uppgiften.

Rekommenderade uppgifter: 6.10

Exempel 10.4. Beräkna

$$\iint_D x^2 dxdy$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$.

Lösning, Alternativ 1 Vi gör ett linjärt variabelbyte först följt av införande av polära koordinater.
$x = 3u, \quad y = 4v$ ger att området ges av

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{(3u)^2}{9} + \frac{(4v)^2}{16} = u^2 + v^2 \leq 1.$$

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12.$$

Med $\Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ får vi:

$$\iint_D x^2 dxdy = \iint_\Omega 9u^2 \left|\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right| dudv = \iint_\Omega 9u^2 12dudv =$$
$$/u = \rho\cos\varphi, v = \rho\sin\varphi/ = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 108\rho^2\cos^2\varphi\rho d\rho\right) d\varphi =$$
$$108\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho = \Big/ \cos^2\varphi = \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} \Big/ =$$
$$\ldots = \frac{108\pi}{4}.$$

Lösning, Alternativ 2: Man kan även direkt införa variablerna

$$\begin{cases} x = 3\rho\cos\varphi \\ y = 4\rho\sin\varphi \end{cases}$$

och får då i dessa att området ges av

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{9\rho^2\cos^2\varphi}{9} + \frac{16\rho^2\sin^2\varphi}{16} = \rho^2 \leq 1.$$

I detta fall gäller

$$\frac{d(x, y)}{d(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} 3\cos\varphi & -3\rho\sin\varphi \\ 4\sin\varphi & 4\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = 12\rho.$$

Gränserna blir nu $0 \leq \rho \leq 1$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, vilket direkt ger oss integralen

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 9\rho^2\cos^2\varphi 12\rho d\rho\right) d\varphi = \ldots = \frac{108\pi}{4}.$$

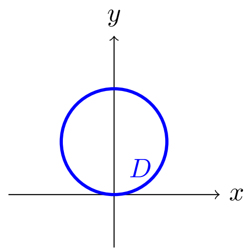
Rekommenderade uppgifter: 6.11

Exempel 10.5. Beräkna

$$\iint_D y dxdy$$

där D är cirkelskivan med centrum i $(0, 1)$ och radie 1.

Lösning, alternativ 1:



I xy-koordinater ges D av olikheten

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

I polära koordinater ges området av

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - 1)^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2\rho \sin \varphi + 1 \leq 1.$$

Detta är samma sak som att

$$\rho^2 \leq 2\rho \sin \varphi \Leftrightarrow \rho \leq 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$\iint_D y dx dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\sin\varphi} \rho \sin \varphi \rho d\rho \right) d\varphi =$$
$$\int_0^\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right]_{\rho=0}^{2\sin\varphi} d\varphi =$$
$$\int_0^\pi \frac{8 \sin^4 \varphi}{3} d\varphi = \ldots = \pi.$$

Lösning, alternativ 2: Vi kan även istället byta koordinater till

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = 1 + \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

vilket motsvarar att vi "flyttar origo" till punkten $(0, 1)$ och sedan inför polära koordinater. Då ges D av $0 \leq \rho \leq 1$ och $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$\iint_D y \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 + \rho \sin \varphi) \rho \, d\rho \right) d\varphi = \ldots = \pi.$$

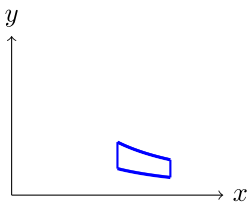
Rekommenderade uppgifter: 6.12

Exempel 10.6. Beräkna

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2, 2 \leq x \leq 3\}$.

Lösning: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2, 2 \leq x \leq 3\}$



$$\begin{cases} u = xy \\ v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v \\ y = u/v \end{cases}$$

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1/v & -u/v^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{v}.$$

Området ges nu av olikheterna $1 \leq u \leq 2$, $2 \leq v \leq 3$.

$$\iint_D x^2y^2dxdy = \int_2^3 \left(\int_1^2 u^2 \frac{1}{v} du \right) dv =$$

$$\int_2^3 \frac{1}{v} dv \cdot \int_1^2 u^2 du = \ldots = \frac{7\ln(3/2)}{3}.$$

Rekommenderade uppgifter: 6.13

11 Trippelintegraler

Exempel 11.1. Visa att

$$0 \leq \iiint_D xy^{1/3} dxdydz \leq 64$$

där D är det axellparallella rätblocket med hörn i $(0,0,0)$ och $(2,8,1)$

Lösning: D ges av olikheterna $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 8$ och $0 \leq z \leq 1$.

Så D har volym $2 \cdot 8 \cdot 1 = 16$.

Eftersom $0 \leq xy^{1/3} \leq 2 \cdot 8^{1/3} = 4$ på D får vi:

$$0 = \iiint_D 0dxdydz \leq \iiint_D xy^{1/3}dxdydz \leq \iiint_D 4dxdydz = 4 \cdot 16 = 64.$$

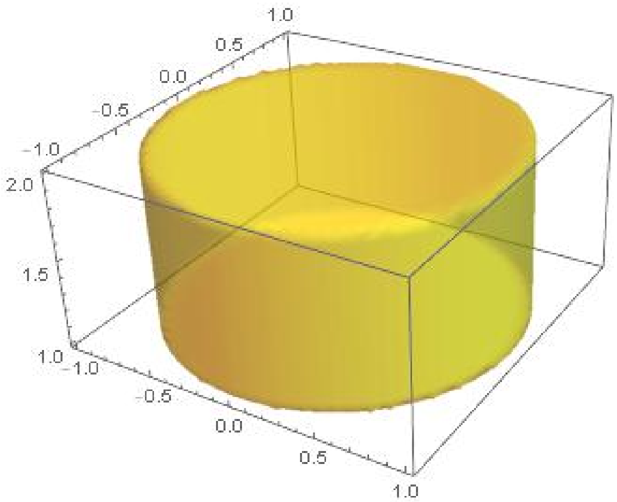
Rekommenderade uppgifter: 6.16

Exempel 11.2. Beräkna

$$\iiint_D z e^{x^2+y^2} dxdydz$$

där $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$.

Lösning:



$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1, 1 \le z \le 2\}$.
Projektion av D på xy-planet är $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$, $1 \le z \le 2$.

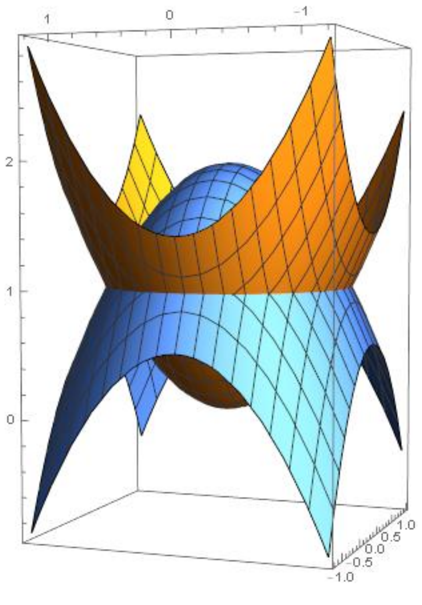
$$\iiint_D z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint_\Omega \left(\int_1^2 z\mathrm{e}^{x^2+y^2}dz\right)dxdy =$$
$$\iint_\Omega \mathrm{e}^{x^2+y^2}dxdy \cdot \int_1^2 zdz = /\text{ Polära koordinater}/ =$$
$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho\mathrm{e}^{\rho^2}d\rho\right)d\varphi = \ldots = 3\pi\frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

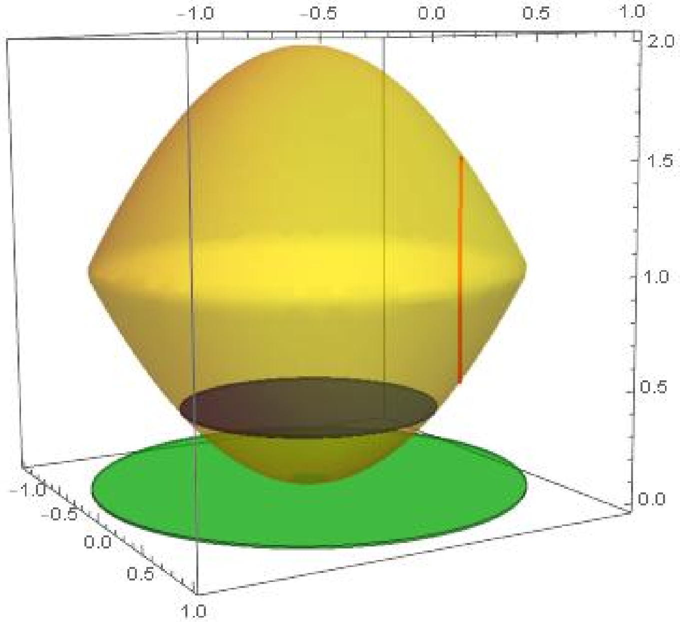
Rekommenderade uppgifter: 6.17

Exempel 11.3. Låt D vara den mängd i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av paraboloiderna $z = x^2+y^2$ och $z = 2-x^2-y^2$.

Skriv integralen
$$I = \iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$
dels med hjälp av stavar:
$$I = \iint_{\widetilde{D}}\left(\int_{A(x,y)}^{B(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy,$$
dels med hjälp av skivor:
$$\int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right)dz.$$
Beräkna sedan på valfritt sätt I då $f(x,y,z) = x^2+y^2$.

Bild av D:





Lösning:

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

$$\widetilde{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}.$$

$$A(x, y) = x^2 + y^2, \quad B(x, y) = 2 - x^2 - y^2.$$

$$0 \le z \le 2.$$

$$D_z = \begin{cases} x^2 + y^2 \le z & 0 \le z \le 1 \\ x^2 + y^2 \le 2 - z & 1 \le z \le 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f(x, y, z)dz \right) dxdy = \\ & \int_0^2 \left(\iint_{D_z} f(x, y, z)dxdy \right) dz = \\ & \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2\le z} f(x, y, z)dxdy \right) dz + \\ & + \int_1^2 \left(\iint_{x^2+y^2\le 2-z} f(x, y, z)dxdy \right) dz. \end{aligned}$$

Beräkning av I för $f(x, y, z) = x^2 + y^2$:

Vi använder metoden med stavar.

$$\iiint_D (x^2 + y^2)dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)dz \right) dxdy =$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2 + y^2)((2 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2))dxdy =$$

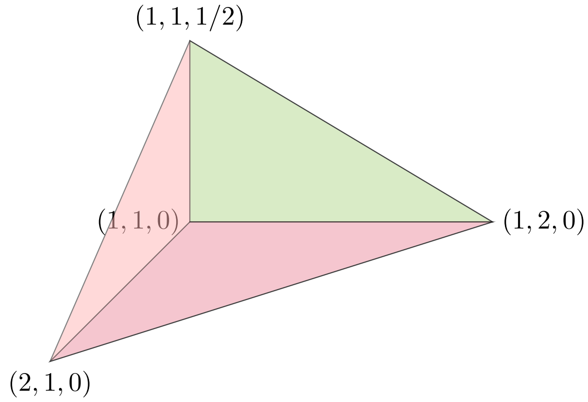
$$2\iint_{x^2+y^2\le 1} ((x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2)dxdy = /\text{Polära koordinater}/ =$$

$$2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (\rho^2 - \rho^4)\rho d\rho \right) d\theta = 4\pi \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1 = \ldots = \frac{\pi}{3}.$$

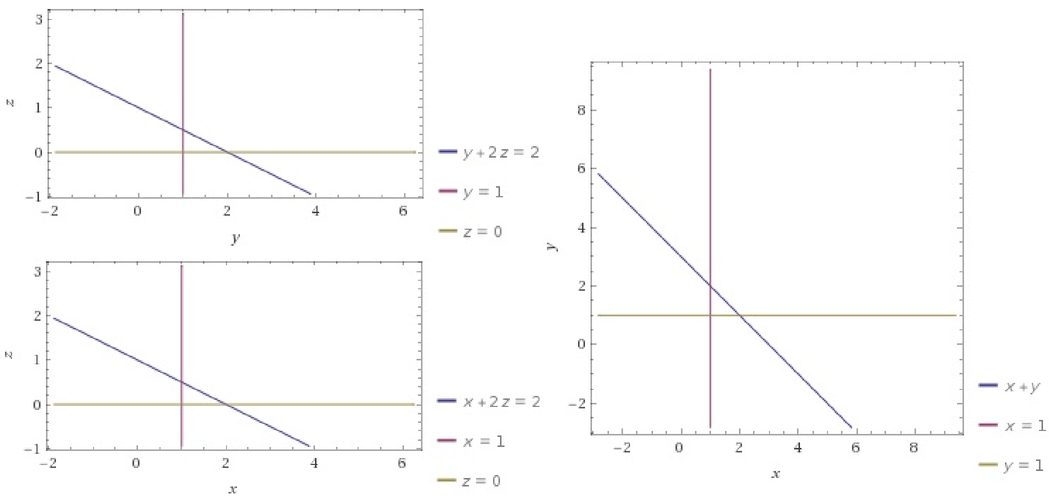
Rekommenderade uppgifter: 6.18

Exempel 11.4. Låt
$$D = \{(x, y, z) : x + y + 2z \leq 3, x \geq 1, y \geq 1, z \geq 0\}.$$
Beräkna
$$\iiint_D x dx dy dz.$$

Bild av D:



Tvärsnitt med koordinatplan:



Lösning:
$$D = \{(x, y, z) : (x, y) \in \widetilde{D}, 0 \leq z \leq (3 - x - y)/2\},$$
där
$$\widetilde{D} = \{(x, y) : x + y \leq 3, x \geq 1, y \geq 1\} =$$
$$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3 - x\}.$$
D.v.s.
$$D = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3 - x, 0 \leq z \leq (3 - x - y)/2\}.$$

$$\iiint_D x dx dy dz = \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} \left(\int_0^{(3-x-y)/2} x dz \right) dy \right) dx =$$
$$\int_1^2 \left(\int_1^{3-x} [xz]_{z=0}^{(3-x-y)/2} dy \right) dx =$$
$$\frac{1}{2} \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} (3x - x^2 - xy) dy \right) dx =$$
$$\frac{1}{2} \int_1^2 \left[(3x - x^2)y - \frac{xy^2}{2} \right]_{y=1}^{3-x} dx =$$
$$\ldots = \frac{1}{2} \int_1^2 (2x - 2x^2 + \frac{x^3}{2}) dx = \ldots = \frac{5}{48}.$$

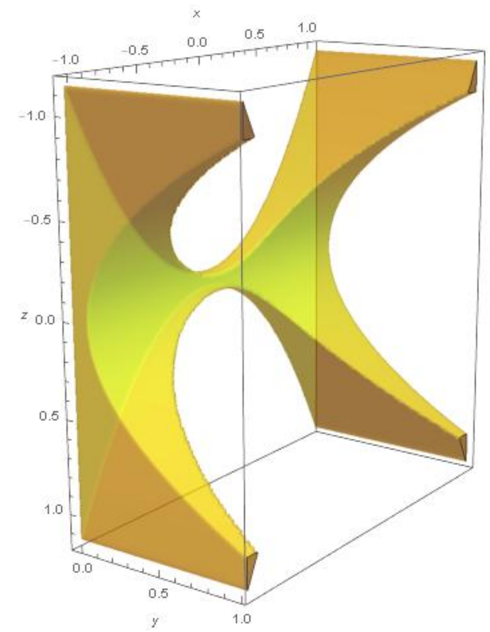
Rekommenderade uppgifter: 6.19

Exempel 11.5. Beräkna

$$\iiint_D x^2 dx dy dz$$

där $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le z^2 \le x^4 \le 1\}$.

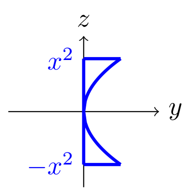
Bild av D**:**



Lösning, Alt 1: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le z^2 \le x^4 \le 1\}$.

Tvärsnittet av D för ett fixt x (projicerat på yz-planet):

$$D_x = \{(y, z) : 0 \le y \le z^2 \le x^4\} = \{(y, z) : 0 \le y \le z^2, -x^2 \le z \le x^2\}.$$



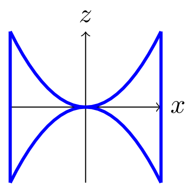
D.v.s. eftersom $0 \leq x^4 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$:

$$D = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, (y, z) \in D_x\}.$$

$$\begin{aligned}
&\iiint_D x^2 dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{D_x} x^2 dydz \right) dx = \\
&\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} \left(\int_0^{z^2} x^2 dy \right) dz \right) dx = \\
&\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} x^2 z^2 dz \right) dx = \\
&\int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2 z^3}{3} \right]_{z=-x^2}^{x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{2x^8}{3} dx = \frac{4}{27}
\end{aligned}$$

Lösning, Alt 2: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}$. Projektionen Ω av D på xz-planet ges av

$$0 \leq z^2 \leq x^4 \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq z \leq x^2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$



För varje $(x, z) \in \Omega$ ska y uppfylla $0 \leq y \leq z^2$ för att ligga i D.

$$\begin{aligned}
&\iiint_D x^2 dxdydz = \iint_\Omega \left(\int_0^{z^2} x^2 dy \right) dxdz = \\
&\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} \left(\int_0^{z^2} x^2 dy \right) dz \right) dx = \\
&\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} x^2 z^2 dz \right) dx = \\
&\int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2 z^3}{3} \right]_{z=-x^2}^{x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{2x^8}{3} dx = \frac{4}{27}
\end{aligned}$$

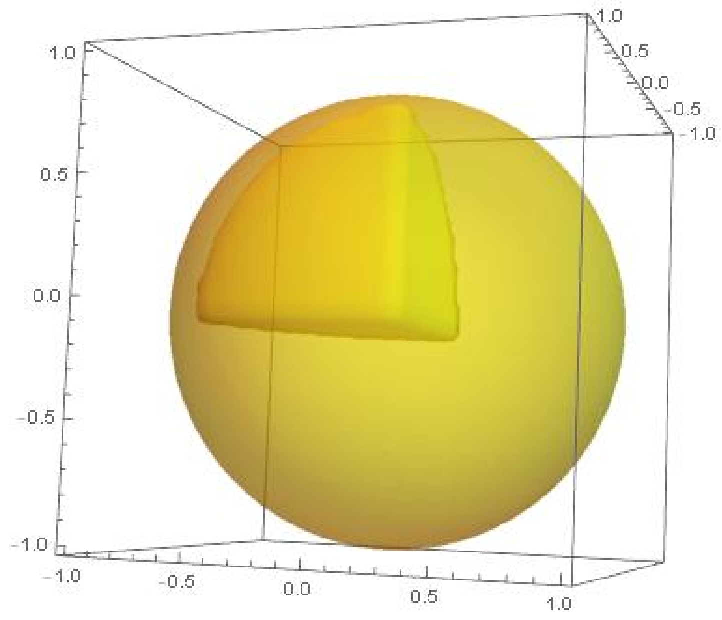
Rekommenderade uppgifter: 6.20, 6.21, 6.24

Exempel 11.6. Beräkna

$$\iiint_D xzdxdydz$$

där D är den del av enhetsklotet som ligger i $x \leq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$.

Bild av D**:**



Lösning:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

$z \geq 0$ ger $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$x \leq 0, y \leq 0$ ger $\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2$.

$dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta$

$$\iiint_D xzdxdydz =$$
$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_{\pi}^{3\pi/2}\left(\int_0^1 r\cos\varphi\sin\theta\cdot r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta dr\right)d\varphi\right)d\theta =$$
$$\int_{\pi}^{3\pi/2}\cos\varphi d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta d\theta\cdot\int_0^1 r^4 dr = \ldots = \frac{-1}{15}.$$

Rekommenderade uppgifter: 6.25, 6.26

Exempel 11.7. Beräkna

$$\iiint_D \sin(x+y+z)dxdydz$$

där D är den parallellepiped som ges av olikheterna $0 \leq x+y+z \leq \pi/2$, $0 \leq 2x+y+z \leq 2$ och $0 \leq x+y+3z \leq 1$.

Lösning: $0 \leq x+y+z \leq \pi/2$, $0 \leq 2x+y+z \leq 2$ och $0 \leq x+y+3z \leq 1$.

$$\begin{cases} u = x+y+z \\ v = 2x+y+z \\ w = x+y+3z \end{cases}$$

I uvw-koordinaterna ges området av olikheterna $0 \leq u \leq \pi/2$, $0 \leq v \leq 2$ och $0 \leq w \leq 1$.

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \ldots = -2.$$

$$dxdydz = \left| \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \right| dudvdw = \left| \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} \right|^{-1} dudvdw = \frac{1}{2} dudvdw.$$

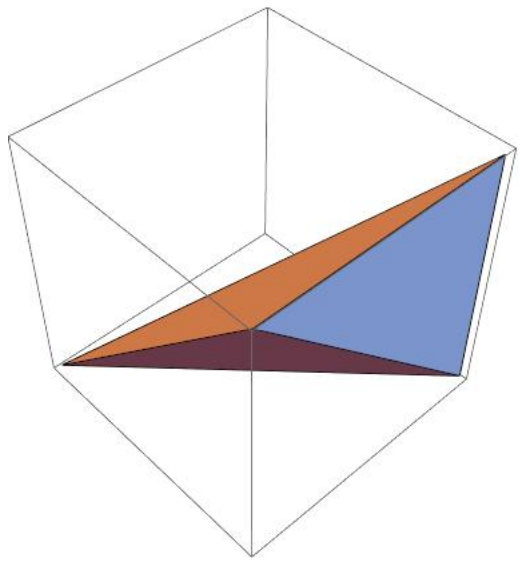
$$\begin{aligned} &\iiint_D \sin(x+y+z) dxdydz = \\ &\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin u \frac{1}{2} du \right) dv \right) dw = \\ &\frac{1}{2} \int_0^1 dw \cdot \int_0^2 dv \cdot \int_0^{\pi/2} \sin u du = \ldots = 1. \end{aligned}$$

Exempel 11.8. Beräkna

$$\iiint_D (x-y) dxdydz$$

där D är tetraedern som har hörn i $(0,0,0), (1,1,1), (1,1,0)$ samt $(1,0,1)$

Lösning:



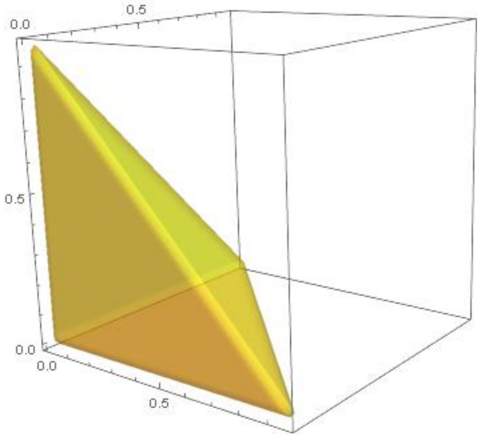
Vi använder $(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1)$ som ny bas.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Tetraedern avbildas nu på tetraedern Ω med hörn i $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ och $(0,0,1)$ i uvw-rummet.

D.v.s.

$$\Omega = \{(u,v,w) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1-u, 0 \leq w \leq 1-u-v\}.$$



Skalfaktor vid variabelbytet:

$$dxdydz = \left|\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\right| dudvdw = |\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}| dudvdw = dudvdw.$$

$$\iiint_D (x-y)dxdydz = \iiint_\Omega wdudvdw =$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-u}\left(\int_0^{1-u-v} wdw\right)dv\right)du =$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{(1-u-v)^2}{2}dv\right)du =$$
$$\int_0^1 \left[-\frac{(1-u-v)^3}{6}\right]_{v=0}^{1-u} du =$$
$$\int_0^1 \frac{(1-u)^3}{6}du = \left[-\frac{(1-u)^4}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

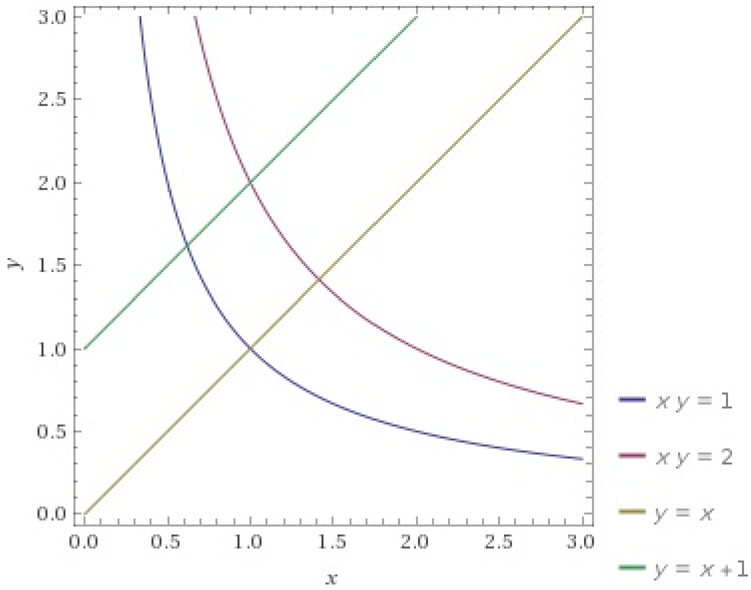
Rekommenderade uppgifter: 6.27

Extrauppgifter: 6.22, 6.23

12 Integraltillämpningar. Generaliserade integraler

Exempel 12.1. Beräkna arean av det begränsade området i första kvadranten mellan kurvorna $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ och $y = 1 + x$.

Bild av begränsningskurvorna:



Lösning:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y - x \end{cases}$$

$$\Omega = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1\}.$$

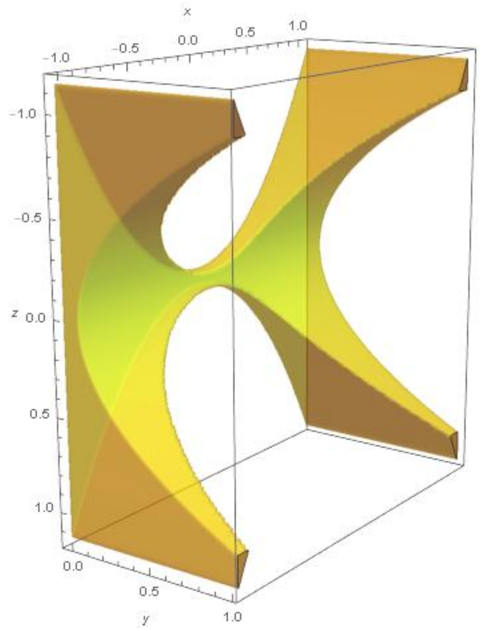
$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = y + x = \ldots = \sqrt{v^2 + 4u}.$$

$$\iint_D dxdy = \iint_\Omega \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \iint_\Omega \left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right|^{-1} dudv =$$
$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{v^2+4u}} dudv = \int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{v^2+4u}} du\right) dv =$$
$$\int_0^1 \left[\frac{1}{2}\sqrt{v^2+4u}\right]_{u=1}^2 dv = \frac{1}{2}\int_0^1 (\sqrt{v^2+8} - \sqrt{v^2+4}) dv = \ldots$$
$$\frac{1}{4}\left[v\sqrt{v^2+8} + 8\ln|v + \sqrt{v^2+8}|\right]_0^1$$
$$-\frac{1}{4}\left[v\sqrt{v^2+4} - 4\ln|v + \sqrt{v^2+4}|\right]_0^1 =$$
$$\frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5} + 4\ln\frac{4}{1+\sqrt{5}}\right) \approx 0.4.$$

Rekommenderade uppgifter: 6.29

Exempel 12.2. Beräkna volymen av området $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z^2 \leq x^4 \leq 1\}$.

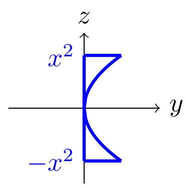
Bild av D**:**



Lösning: $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le z^2 \le x^4 \le 1\}$.

Tvärsnittet av D för ett fixt x (projicerat på yz-planet):

$$D_x = \{(y,z) : 0 \le y \le z^2 \le x^4\} = \{(y,z) : 0 \le y \le z^2, -x^2 \le z \le x^2\}.$$



D.v.s. eftersom $0 \le x^4 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$:

$$D = \{(x,y,z) : -1 \le x \le 1, (y,z) \in D_x\}.$$

$$\iiint_D dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{D_x} dydz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} \left(\int_0^{z^2} dy \right) dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-x^2}^{x^2} z^2 dz \right) dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=-x^2}^{x^2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x^6}{3} dx = \frac{4}{21}$$

Rekommenderade uppgifter: 6.30

Exempel 12.3. Beräkna volymen av tetraedern som avgränsas av planen $x+y+z=0$, $x+2y+z=0$, $2x+y+3z=0$ samt $4x+4y+5z=1$.

Lösning: $x+y+z=0$, $x+2y+z=0$, $2x+y+3z=0$, $4x+4y+5z=1$.

Med

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ v = x + 2y + z \\ w = 2x + y + 3z \end{cases}$$

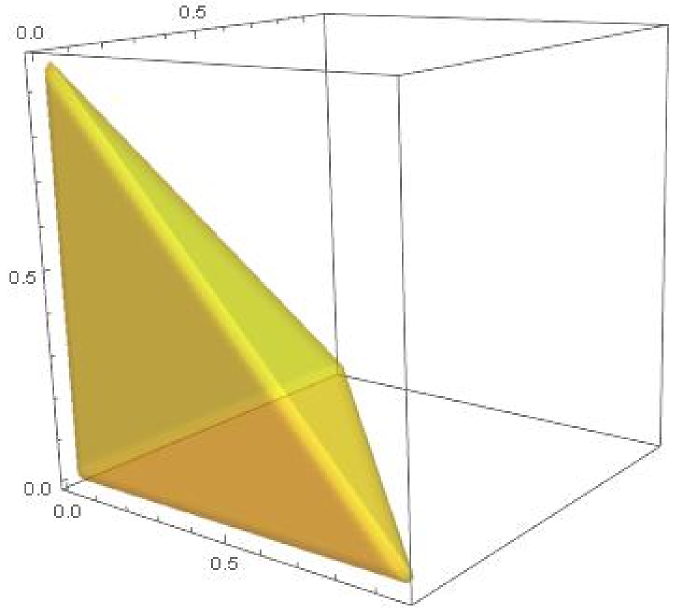
får vi

$$4x + 4y + 5z = u + v + w.$$

Så i uvw-koordinaterna ges planen av $u = 0$,$v = 0$, $w = 0$ samt $u + v + w = 1$. Det område som dessa begränsar ges av $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1 - u$, $0 \leq w \leq 1 - u - v$.

$$dxdydz = \left|\frac{d(x,y,z))}{d(u,v,w)}\right| dudvdw = \left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}\right|^{-1} dudvdw = dudvdw.$$

Bild av området i uvw-rummet:



$$\iiint_D dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \left(\int_0^{1-u-v} dw\right) dv\right) du =$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1 - u - v)dv\right) du = \int_0^1 \left[v(1-u) - \frac{v^2}{2}\right]_0^{1-u} du =$$
$$\int_0^1 \left((1-u)^2 - \frac{(1-u)^2}{2}\right) du = \ldots = \frac{1}{6}$$

Rekommenderade uppgifter: 6.31, 6.32, 6.36, 6.38

Exempel 12.4. Bestäm massan och tyngdpunkten till den platta som utgörs av den del av enhetscirkeln som ligger i första kvadranten och har densitet given av $\varrho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Lösning: I polära koordinater ges området av
$0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.
Massan ges av

$$\iint_D \varrho(x,y)dxdy = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho \cdot \rho d\rho\right) d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Tyngdpunkten (x_t, y_t) ges av

$$x_t = \frac{\iint_D x\varrho(x,y)dxdy}{\iint_D \varrho(x,y)dxdy}, \quad y_t = \frac{\iint_D y\varrho(x,y)dxdy}{\iint_D \varrho(x,y)dxdy}.$$

Av symmetriskäl ser vi att $x_t = y_t$.

$$\iint_D x\varrho(x,y)dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho\cos\varphi \cdot \rho \cdot \rho d\rho \right) d\varphi = \ldots = \frac{1}{4}.$$

Så

$$x_t = y_t = \frac{1/4}{\pi/6} = \frac{3}{2\pi}.$$

Rekommenderade uppgifter: 6.39, 6.40, 6.41, 6.42

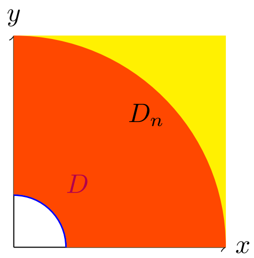
När vi behandlar generaliserade integraler har vi i princip två alternativ. Antingen jobbar vi med definitionen och uttömmande följder, eller så arbetar vi direkt med Fubinis sats (och eventuellt variabelbyte). Vi har nedan presenterat lösningar med båda alternativen. Ni får välja själva vilken metod ni föredrar.

Exempel 12.5. Beräkna (om den är konvergent)

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy,$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2, x \ge 0, y \ge 0\}$.

Lösning (med uttömmande följd): $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2, x \ge 0, y \ge 0\}$. Integranden är positiv. Vi tömmer ut D med följden D_n:



$$D_n = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le n^2, x \ge 0, y \ge 0\}.$$

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^n \frac{1}{\rho^4} \rho d\rho \right) d\varphi =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \left[\frac{-1}{2\rho^2} \right]_1^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}) = \frac{\pi}{4}.$$

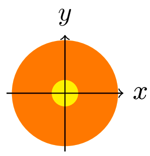
Lösning (med Fubinis sats/Variabelbyte): Integranden är positiv. Området ges i polära koordinater av $1 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. Vi vill alltså avgöra om

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^\infty \frac{1}{\rho^4} \rho \, d\rho \right) d\varphi < \infty.$$

Eftersom
$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_1^{\infty}\frac{1}{\rho^4}\rho\,d\rho\right)\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{\rho^3}\,d\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2\rho^2}\right]_1^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2})=\frac{\pi}{4}<\infty$$
så är integralen konvergent med värdet $\pi/4$.

Exempel 12.6. Beräkna
$$\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy,$$
där $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 1\}$.

Lösning (med uttömmande följd): $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 1\}$. Per definition gäller
$$\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{D\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$$
Integranden är positiv. Vi tömmer ut $D\setminus\{(0,0)\}$ med följden D_n:



$$D_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1/n^2\leq x^2+y^2\leq 1\}$$

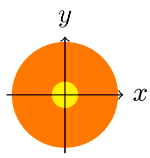
$$\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_{1/n}^1\frac{1}{\rho}\rho d\rho\right)d\varphi=$$
$$\lim_{n\to\infty}2\pi(1-\frac{1}{n})=2\pi.$$

Lösning (med Fubinis sats/Variabelbyte): Integranden är positiv. Området ges i polära koordinater av $0\leq\rho\leq 1$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$.
$$\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\frac{1}{\rho}\rho d\rho\right)d\varphi=\ldots=2\pi.$$

SVAR: Integralen är konvergent med värdet 2π.

Exempel 12.7. Beräkna
$$\iint_D\frac{1}{x^2+y^2}dxdy,$$
där $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 1\}$.

Lösning (med uttömmande följd): $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 1\}$. Per definition gäller
$$\iint_D\frac{1}{x^2+y^2}dxdy=\iint_{D\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{x^2+y^2}dxdy.$$
Integranden är positiv. Vi tömmer ut D med följden D_n:



$$D_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1/n^2\leq x^2+y^2\leq 1\}$$

$$
\begin{aligned}
&\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{1}{x^2+y^2}dxdy = \\
&\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_{1/n}^1 \frac{1}{\rho^2}\rho d\rho\right)d\varphi = \\
&\lim_{n\to\infty} 2\pi(\ln 1 - \ln(1/n)) = \infty.
\end{aligned}
$$

Så integralen är divergent.

Lösning (med Fubinis sats/Variabelbyte): Integranden är positiv. I polära koordinater ges området av $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$
\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^2}\rho d\rho\right)d\varphi = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{\rho}\,d\rho = \infty.
$$

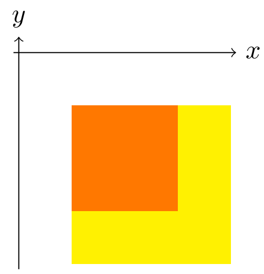
Så integralen är divergent.

Exempel 12.8. Beräkna

$$
\iint_D \mathrm{e}^{-x+y}dxdy,
$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 1, y \le -1\}$.

Lösning (med uttömmande följd): $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 1, y \le -1\}$. Integranden är positiv. Vi tömmer ut D med följden D_n:



$$
D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le n, -n \le y \le -1\}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iint_D \mathrm{e}^{-x+y}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \mathrm{e}^{-x+y}dxdy = \\
&\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{-1}\left(\int_1^n \mathrm{e}^{-x+y}dx\right)dy = \\
&\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{-1}\left[-\mathrm{e}^{-x+y}\right]_{x=1}^{n}dy = \\
&\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{-1}(\mathrm{e}^{-1+y} - \mathrm{e}^{-n+y})dy = \\
&\lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-1+y} - \mathrm{e}^{-n+y}\right]_{y=-n}^{-1} = \\
&\lim_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-n-1} - \mathrm{e}^{-1-n} + \mathrm{e}^{-n-n}) = \mathrm{e}^{-2}.
\end{aligned}
$$

Lösning (med Fubinis sats): Integranden är positiv. Området ges av $1 \le x < \infty$, $-\infty < y \le -1$.

Alltså får vi enligt Fubinis sats:

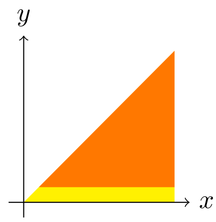
$$\iint_D \mathrm{e}^{-x+y} dxdy = \int_{-\infty}^{-1} \left(\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x+y} dx \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{-1} \left[-\mathrm{e}^{-x+y} \right]_{x=1}^{\infty} dy = \int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{-1+y} dy$$
$$= \left[\mathrm{e}^{-1+y} \right]_{-\infty}^{-1} = \mathrm{e}^{-2}.$$

(Observera att t.ex. $[-\mathrm{e}^{-x+y}]_{x=1}^{\infty} = \lim_{t\to\infty} [-\mathrm{e}^{-x+y}]_{x=1}^{t}$ per definition här.)
SVAR: e^{-2}.

Rekommenderade uppgifter: 6.43, 6.44

Exempel 12.9. Beräkna
$$\iint_D \frac{dxdy}{(xy^2)^{1/4}},$$
där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq x \leq 1\}$.

Lösning (med uttömmande följd): $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq x \leq 1\}$. Integranden är positiv. Vi tömmer ut D med följden D_n:



$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/n \leq x \leq 1, 1/n \leq y \leq x\}$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(xy^2)^{1/4}} = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{dxdy}{(xy^2)^{1/4}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} \left(\int_{1/n}^{x} \frac{1}{(xy^2)^{1/4}} dy \right) dx =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} \left[\frac{2y^{1/2}}{x^{1/4}} \right]_{y=1/n}^{x} dx =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} \left(\frac{2x^{1/2}}{x^{1/4}} - \frac{2(1/n)^{1/2}}{x^{1/4}} \right) dx =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{8x^{5/4}}{5} - \frac{8(1/n)^{1/2} x^{3/4}}{3} \right]_{x=1/n}^{1} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{5} - \frac{8(1/n)^{1/2}}{3} - \frac{8(1/n)^{5/4}}{5} + \frac{8(1/n)^{1/2}(1/n)^{3/4}}{3} \right) = \frac{8}{5}.$$

Lösning (med Fubinis sats): Integranden är positiv. Området ges av $0 < x \leq 1$, $0 < y \leq x$.

Enligt Fubinis sats har vi

$$\iint_D \frac{dxdy}{(xy^2)^{1/4}} = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{(xy^2)^{1/4}} dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{2y^{1/2}}{x^{1/4}} \right]_{y=0}^x dx = \int_0^1 2x^{1/4} dx = \left[\frac{8x^{5/4}}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{5}.$$

Rekommenderade uppgifter: 6.45, 6.46, 6.48

Exempel 12.10. Beräkna

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz.$$

Lösning (med uttömmande följd): Integranden är positiv.

Vi tömmer ut $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ med $D_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/n^2 \le x^2+y^2+z^2 \le n^2\}$.

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$
$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^n \frac{1}{r(1+r^2)^2} r^2 \sin\theta dr \right) d\varphi \right) d\theta =$$
$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_{1/n}^n \frac{r}{(1+r^2)^2} dr =$$
$$\lim_{n\to\infty} 4\pi \left[\frac{-1}{2(1+r^2)} \right]_{r=1/n}^n =$$
$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \left(\frac{-1}{(1+n^2)} + \frac{1}{(1+(1/n)^2)} \right) = 2\pi.$$

Lösning (med Fubinis sats/Variabelbyte): Integranden är positiv. Området ges i sfäriska/rymdpolära koordinater av $0 < r < \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Alltså gäller

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \left(\int_0^\infty \frac{1}{r(1+r^2)^2} r^2 \sin\theta dr \right) d\theta \right) d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_0^\infty \frac{r}{(1+r^2)^2} dr = \cdots = 2\pi.$$

Rekommenderade uppgifter: 6.50

Exempel 12.11. Beräkna

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz,$$

där $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}$.

Lösning (med uttömmande följd): Integranden är positiv.

Vi tömmer ut D med

$$D_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1/n \le z < 1 - x^2 - y^2, 1/n^2 \le x^2 + y^2 \le 1 - 1/n\}.$$

Om vi inför polära koordinater i xy-planet ges området av

$$1/n \leq z < 1-\rho^2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 1/n \leq \rho \leq \sqrt{1-1/n}.$$

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz = \lim_{n\to\infty} \iiint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^{\sqrt{1-1/n}} \left(\int_{1/n}^{1-\rho^2} \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{\rho^2}} dz \right) \rho d\rho \right) d\varphi =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_{1/n}^{\sqrt{1-1/n}} \left[\frac{2\sqrt{z}}{\rho} \right]_{z=1/n}^{1-\rho^2} \rho d\rho \right) d\varphi =$$

$$\lim_{n\to\infty} 4\pi \int_{1/n}^{\sqrt{1-1/n}} (\sqrt{1-\rho^2} - \sqrt{1/n}) d\rho =$$

$$4\pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} d\rho = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \ldots = \pi^2.$$

Lösning (med Fubinis sats/Variabelbyte): Integranden är positiv. Om vi inför polära koordinater i xy-planet ges området av $0 < z < 1-\rho^2$, $0 \leq \rho < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Alltså gäller

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{z}\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-\rho^2} \frac{1}{\sqrt{z}\rho} \rho dz \right) d\rho \right) d\varphi = 2\pi \int_0^1 \left[2\sqrt{z} \right]_{z=0}^{1-\rho^2} d\rho$$

$$= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} d\rho = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \ldots = \pi^2.$$

Rekommenderade uppgifter: 6.51

Exempel 12.12. Beräkna

$$\iint_D y dxdy,$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, x \geq 0\}$.

Lösning: Felaktig metod (eftersom integranden inte är positiv på området) och felaktigt svar får vi om vi tömmer ut D med $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq n\}$.

Eftersom $\iint_{D_n} y dxdy = 0$ för varje n skulle man då dra den felaktiga slutatsen att den generaliserade integralen är konvergent.

Korrekt är att först införa

$$D_+ = \{(x,y) \in D : y > 0\}, \quad D_- = \{(x,y) \in D : y < 0\}.$$

Att integralen är konvergent skulle betyda att båda integralerna

$$\iint_{D_+} y dxdy \text{ och } \iint_{D_-} y dxdy$$

är konvergenta. Men i detta fall är det lätt att se att bägge dessa är divergenta, så integralen är divergent.

Extrauppgifter: 6.33, 6.34, 6.35, 6.37, 6.52, 6.53