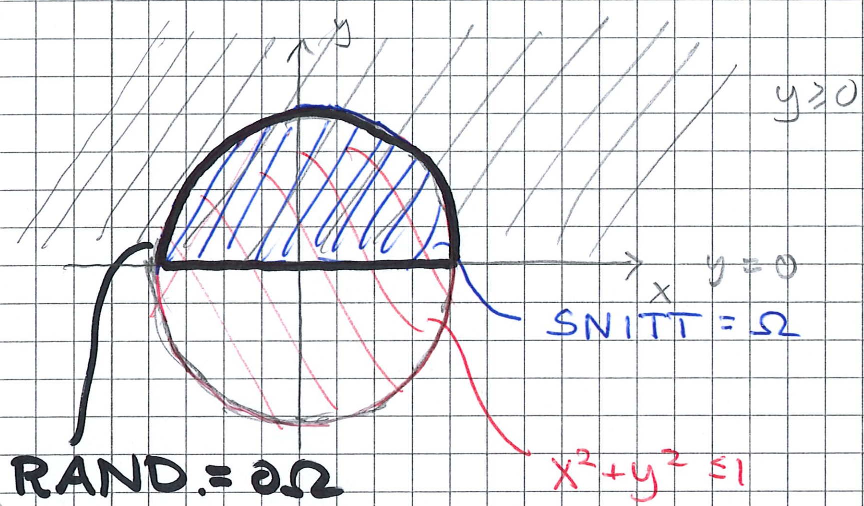
1.1 a)

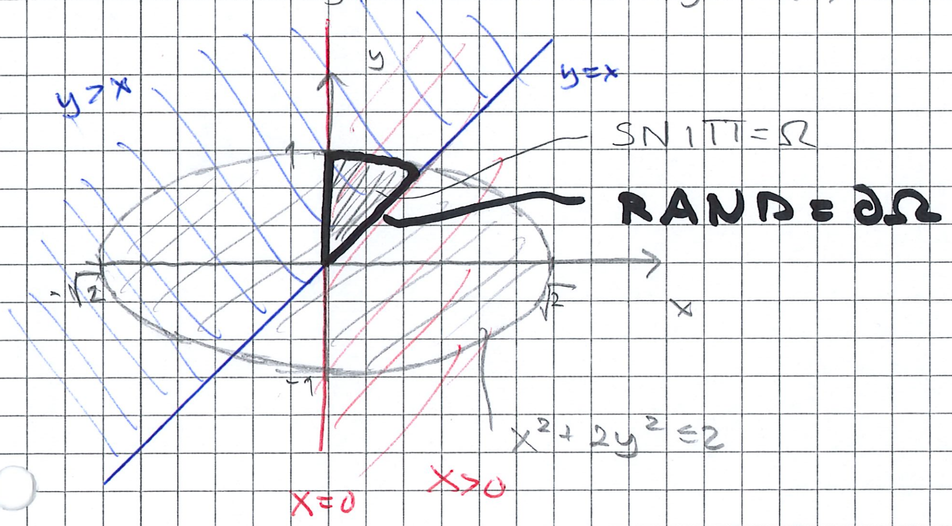
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\} = \Omega$



I detta fall, $\partial\Omega \subset \Omega$.

b)

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \leq 2,\ 0 < x < y\} = \Omega$



I detta fall ligger den del av $\partial\Omega$ som ligger på ellipsen $x^2+2y^2=2$ i Ω, men inte de som ligger på linjerna $y=x$ resp. $x=0$.

Yttre punkter är i både a och b de som varken ligger i Ω eller på $\partial\Omega$ (per def.)

1.2 a)

$$\Omega = \{(x,y) : |x| + |y| < 1\}$$

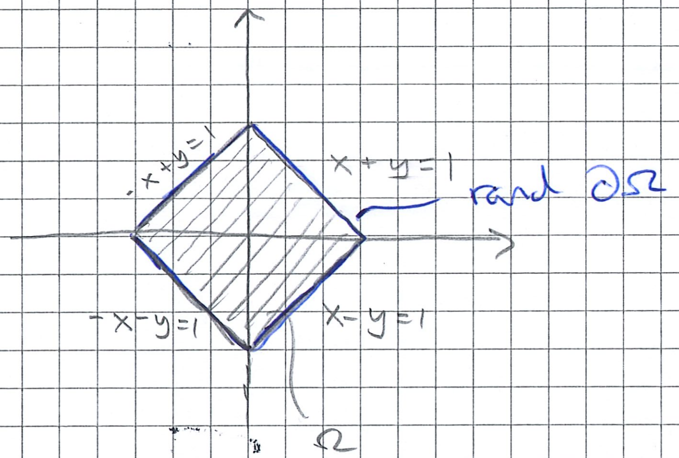
Behandla i respektive kvadrant var för sig:

När $x \geq 0,\ y \geq 0$: $|x| + |y| = x + y < 1$

$x \geq 0,\ y \leq 0$: $|x| + |y| = x - y < 1$

$x \leq 0,\ y \leq 0$: $|x| + |y| = -x - y < 1$

$x \leq 0,\ y \geq 0$: $|x| + |y| = -x + y < 1$



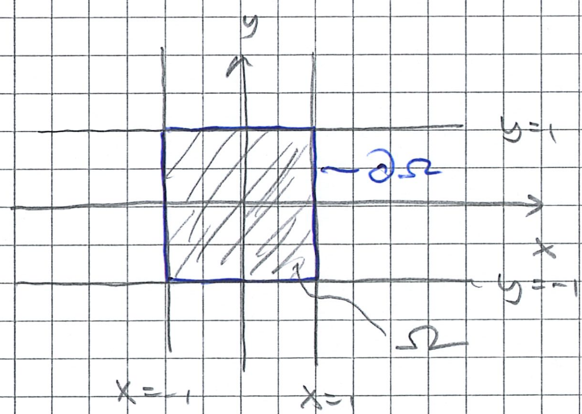
I detta fall ligger inga punkter på $\partial\Omega$ i Ω.

b)

$$\Omega = \{(x,y) : \max(|x|, |y|) \leq 1\} =$$

$$= \{(x,y) : |x| \leq 1 \text{ och } |y| \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1 \text{ och } -1 \leq y \leq 1\}$$



I detta fall ligger $\partial\Omega$ i Ω.

1.3

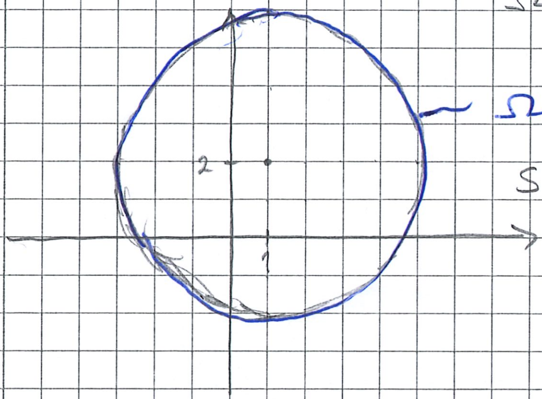
a)

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 - 4 = 11 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16 = 4^2$

Cirkel med radie 4 och centrum i (1,2)

$\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2-2x-4y=11\}$



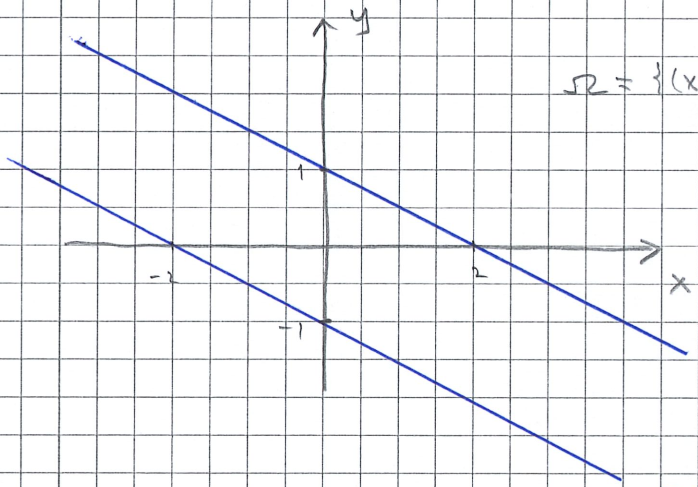
$\Omega = \partial\Omega$ i detta fall.

Saknar inre punkter.

b)

$|x+2y| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x+2y = \pm 2$

$\Omega = \{(x,y) : |x+2y| = 2\}$



$\Omega = \partial\Omega$ i detta fall.

Saknar inre punkter. Består av två linjer.

1.4 1.1a $\Rightarrow$ Mängden är sluten eftersom $\partial\Omega \subset \Omega$. + Begränsad.

1.1b $\Rightarrow$ Mängden är varken öppen eller sluten eftersom en del av randen ligger i Ω, men en del ej gör det. Den är begränsad

1.2a $\Rightarrow$ Mängden är öppen eftersom $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$. Beg.

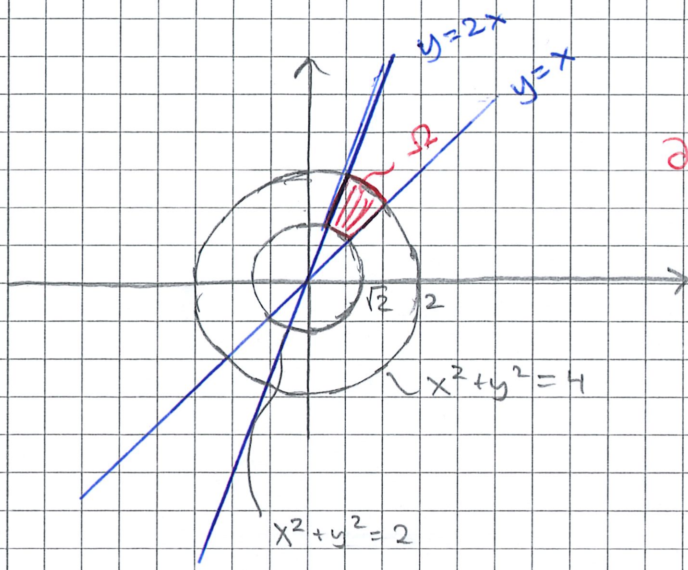
1.2b $\Rightarrow$ Sluten då $\partial\Omega \subset \Omega$. Begränsad.

1.3a $\Rightarrow$ Sluten då $\partial\Omega \subset \Omega$. Begränsad.

1.3b $\Rightarrow$ Sluten då $\partial\Omega \subset \Omega$. Obegränsad.

1.7 a)

$\Omega = \{(x,y) : 2 \le x^2+y^2 \le 4 \ , \ x \le y \le 2x\}$



$\partial\Omega \subset \Omega$ i detta fall.

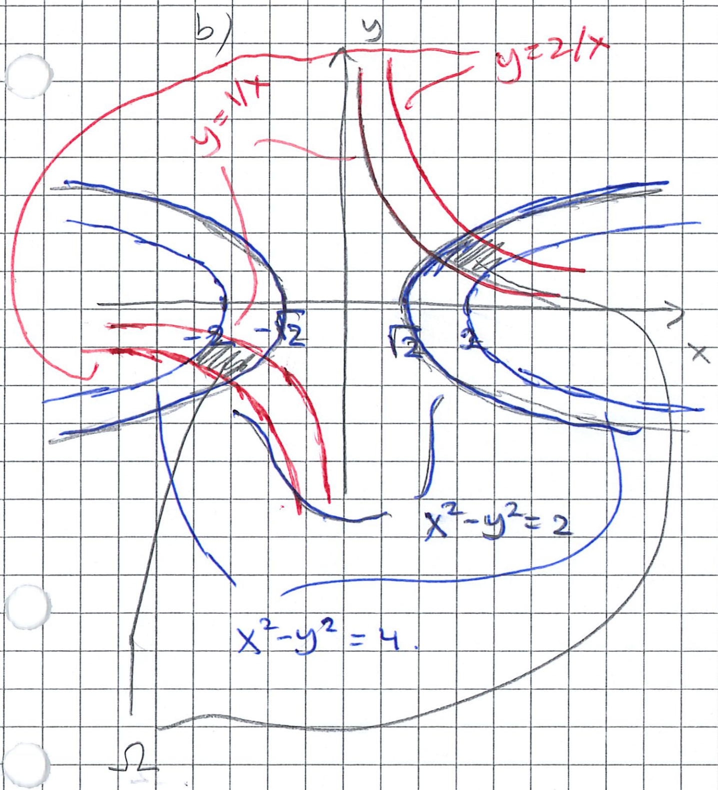
OBS!

$x \le y \le 2x \Rightarrow$

$x \le 2x \Leftrightarrow x \ge 0$

så $0 \le x \le y$

b)



$x^2-y^2=2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2+y^2}$

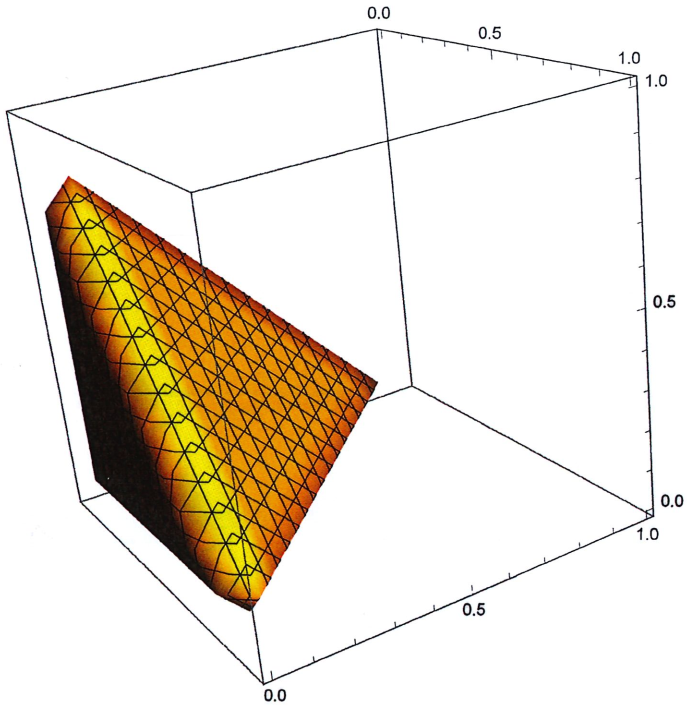
$x^2-y^2=4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4+y^2}$

Hyperbla

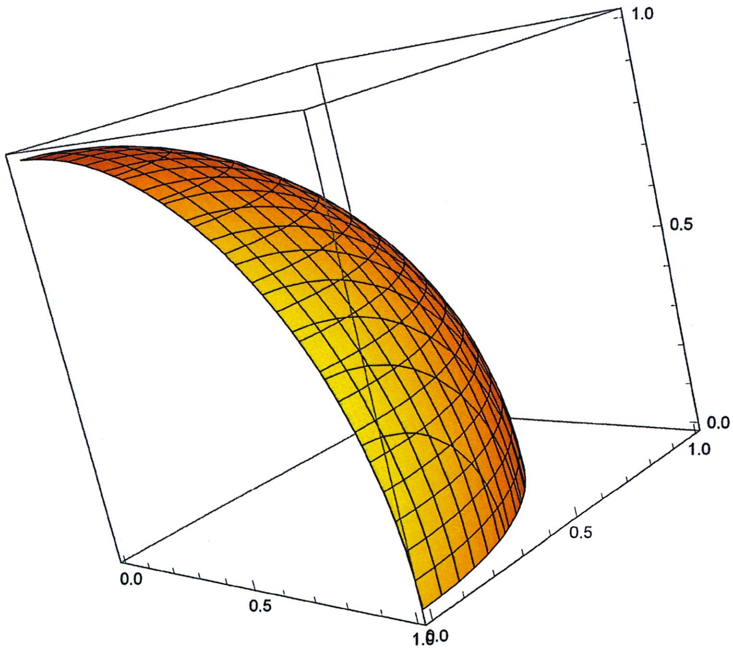
$xy = 1 \Leftrightarrow y = 1/x$

$xy = 2 \Leftrightarrow y = 2/x$

1.9 a : Tetraeder som avgränsas av planen $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$.



1.9 b : Den del av enhetssfären som ligger i första oktanten.



1.9 c : Snittet mellan enhetsklotet och en dubbelkon.

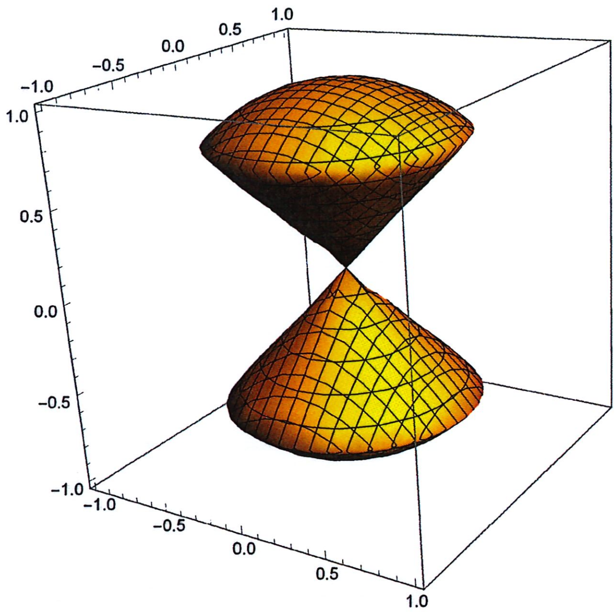
OBS! $x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{x^2+y^2}=\pm\rho$

där $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ (pol. koord)

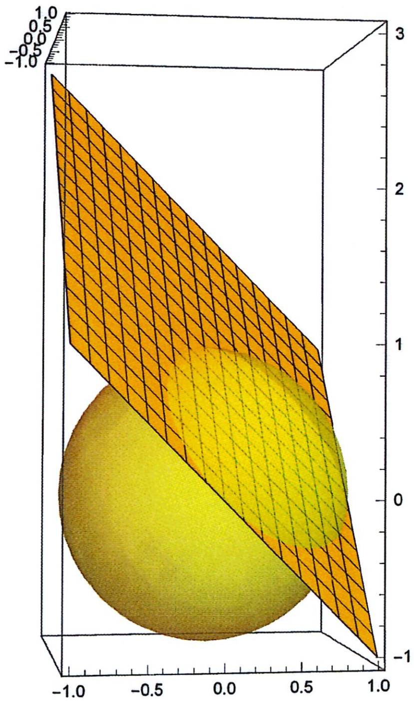
Alltså rotationssymmetrisk runt z-axeln.

I $y=0$-planet gäller $z=\pm\sqrt{x^2}=\pm|x|$

$z^2 = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$: enhetssfären



1.9 d : Den del av planet x + y + z = 1 som ligger i enhetsklotet.



1.10

$\Omega = \{(x,y): \; x^2+y^2-6y+4 \le 0, \; x^2+y^2-6x+6y-2 \le 0\}$

$x^2+y^2-6y+4 = x^2+(y-3)^2-9+4 \le 0 \iff$

$x^2+(y-3)^2 \le \sqrt{5}^{\,2}$ Cirkelskiva med radie $\sqrt{5}$ och centrum $(0,3)$.

$x^2+y^2-6x+6y-2 = (x-3)^2-9+(y+3)^2-9-2 \le 0$

$\iff (x-3)^2+(y+3)^2 \le \sqrt{20}^{\,2}$

Cirkelskiva med radie $\sqrt{20}$ och centrum $(3,-3)$.

Inte uppenbart att de skär varandra, så vi kollar om ränderna $x^2+(y-3)^2=5$ och $(x-3)^2+(y+3)^2=20$ skär varandra:

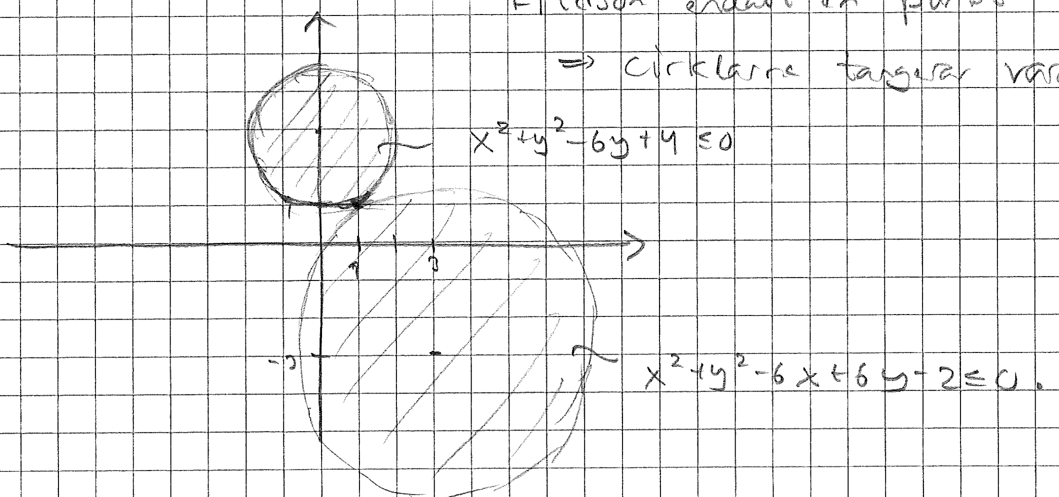
$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+6y-2=0 \\ x^2+y^2-6y+4=0 \quad (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} -6x+12y-6=0 \\ x^2+y^2-6y+4=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=2y-1 \\ (2y-1)^2+y^2-6y+4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2y-1 \\ 5y^2-10y+5=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=2y-1 \\ 5(y-1)^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

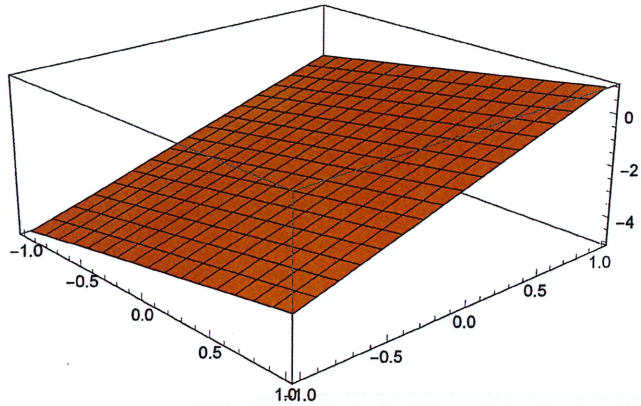
Eftersom endast en punkt

$\Rightarrow$ cirklarna tangerar varandra

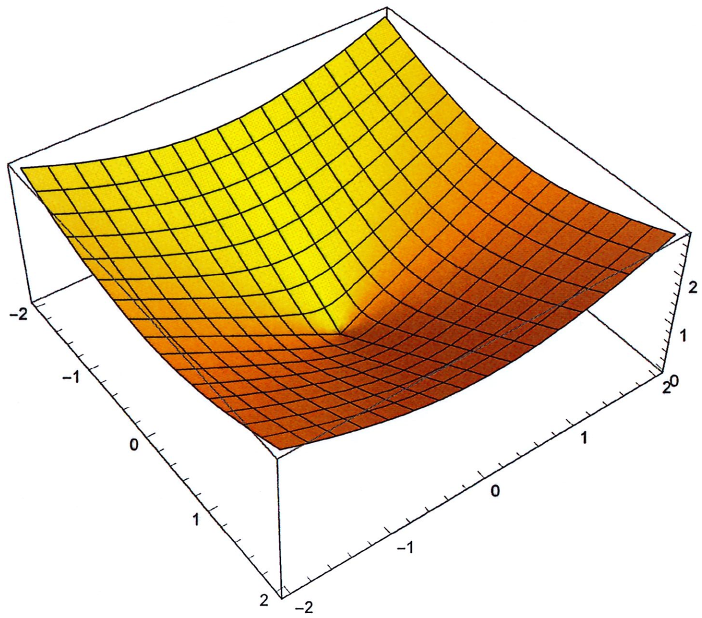


SVAR: $\Omega = \{(1,1)\}$.

1.12 a : $z = x + 2y - 2 \Leftrightarrow x + 2y - z = 2$ är ett plan på normalform med normal $(1, 2, -1)$.

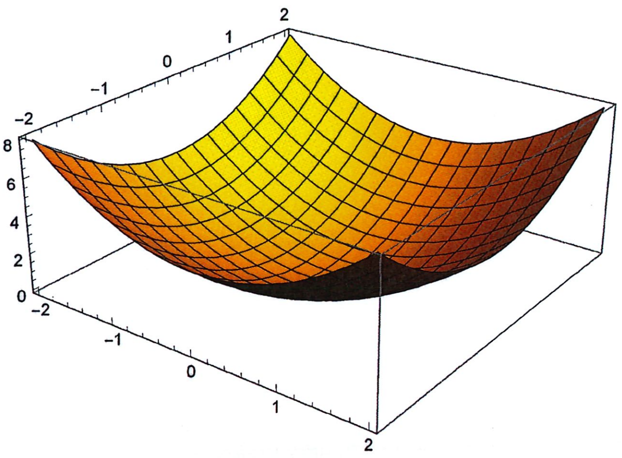


1.12 b : Kon. Notera att t.ex. i xz - planet ges grafen av $z = |x|$.

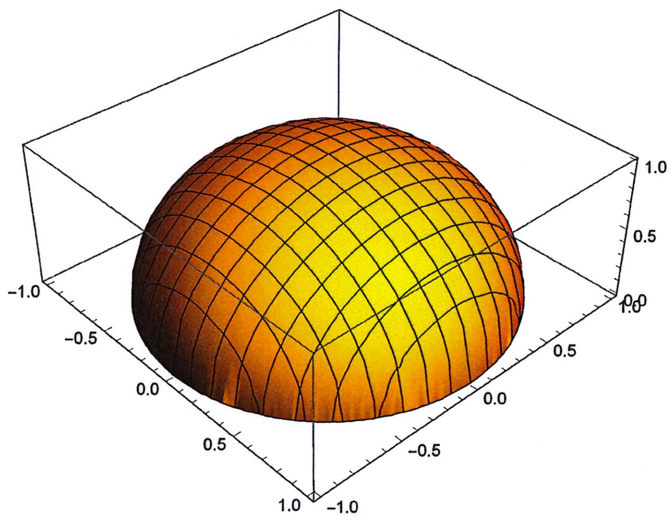


1.12 c : Paraboloid.

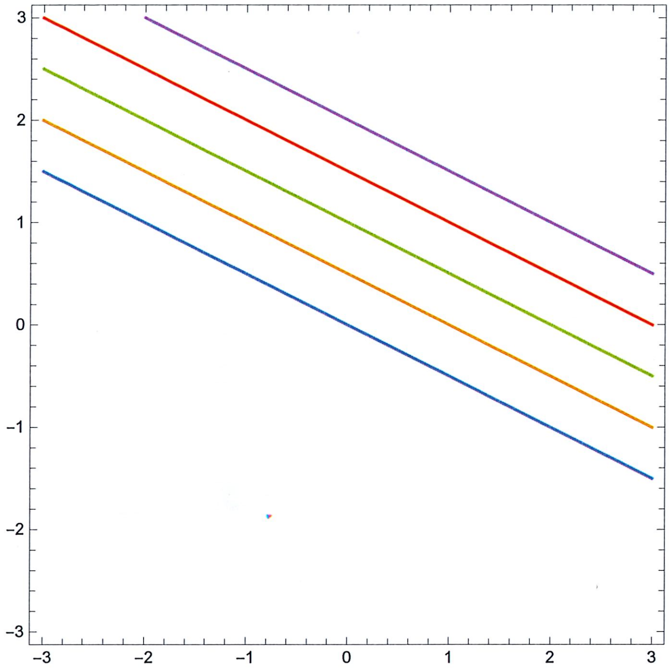
OBS! Notera i 1.12 b - d beror
z bara på $x^2 + y^2 = \rho^2$ (pol. koord.)
Alltså rotationssymmetriska runt z-axeln.



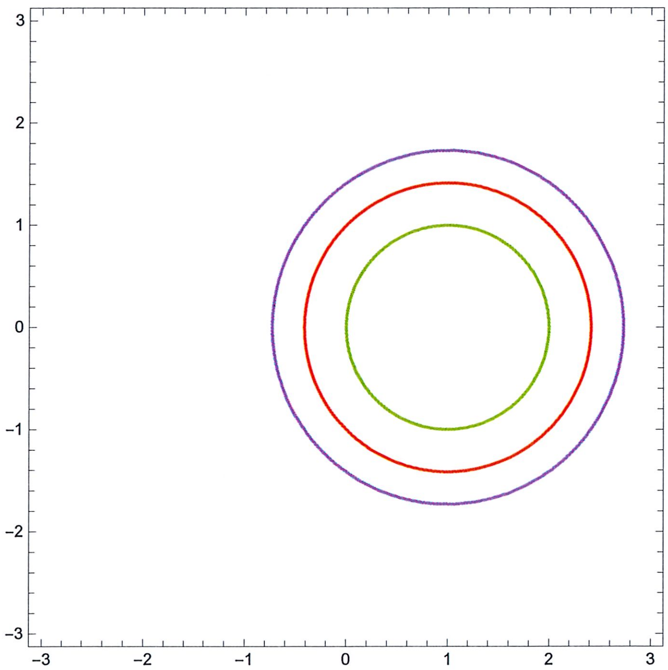
1.12 d : Övre delen av enhetssfären.



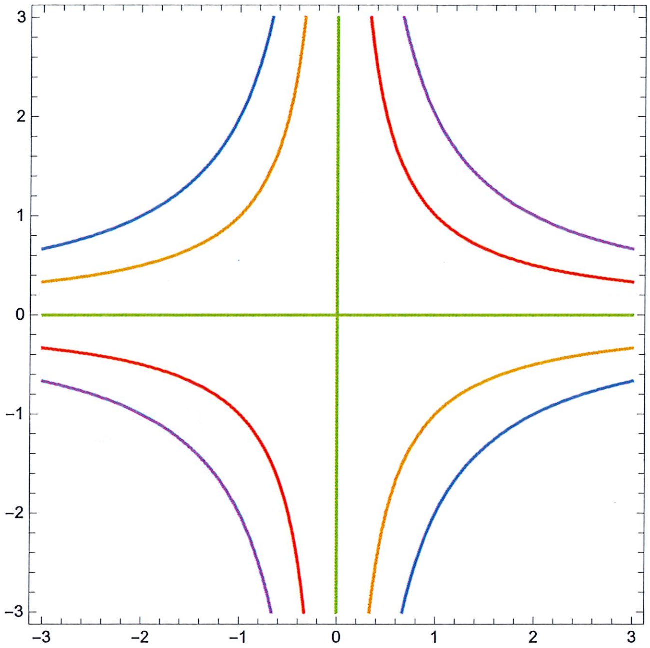
1.13 a : Räta linjer.



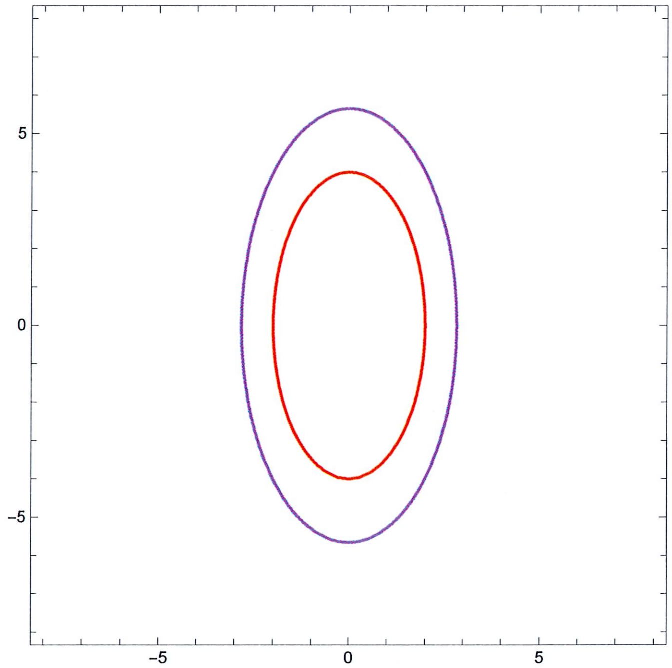
1.13 b : $x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 = C + 1$ ger cirklar med radie $(C+1)^{1/2}$ om $C > -1$, och centrum i $(1, 0)$. Endast punkten $(1, 0)$ om $C = -1$ och tomma mängden om $C < -1$.



1.13 c : Om $C \neq 0$ består nivåkurvan av funktionskurvan $y = C / x$ (som har två delar). Om $C = 0$ är $xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ eller $y = 0$, d.v.s. består av koordinataxlarna.



1.13 d : Nedan med $a = 2$ och $b = 4$. Ger ellipser om $C > 0$. Bara punkten $(0, 0)$ om $C = 0$ och tomma mängden om $C < 0$.



1.5 + 1.6)

a) $M =]0, 1]$ $\partial M = \{0, 1\}$.

Varken öppen eller sluten då $0 \in \partial M$ men $0 \notin M$

$1 \in \partial M$ och $1 \in M$.

b)

$x^2 \geq 0$ gäller för alla x, så

$M = \mathbb{R}$. (Så både öppen och sluten, $\partial M = \emptyset$).

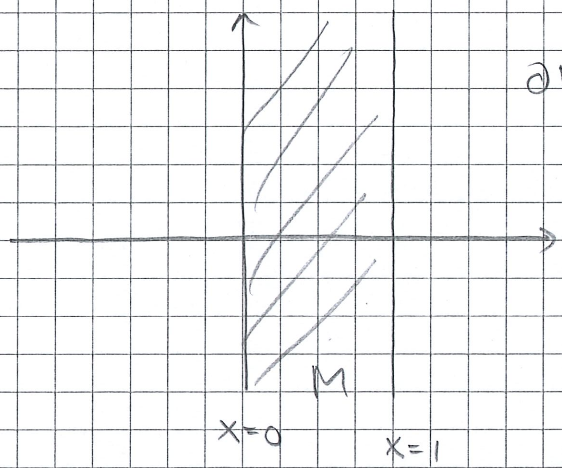
c) $2x > x^2 + 1 \iff x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 < 0$, gäller

inte för något x, så $M = \emptyset$.

(M både öppen och sluten.)

d)

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$



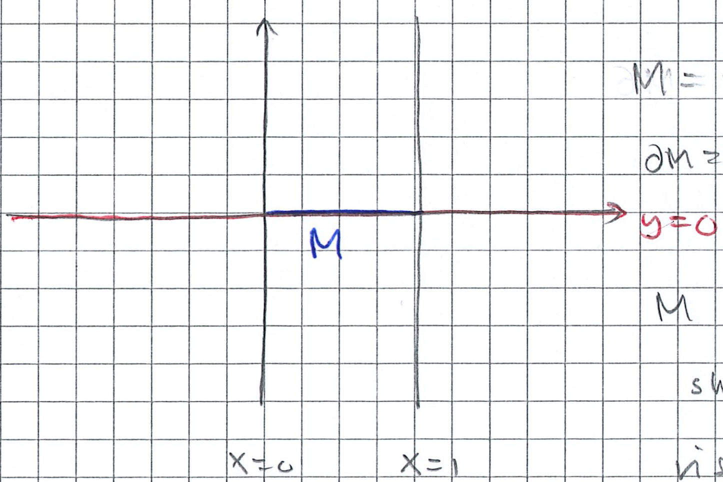
$\partial M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ eller } x = 1\}$

$\partial M \cap M = \emptyset$ så

M är öppen.

e)

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \ y = 0\}$



$M = \{(x,0) : 0 < x < 1\}$

$\partial M = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$.

M är varken öppen eller sluten, eftersom vissa punkter i ∂M ligger i M men vissa inte.

1.11) $x^2+y^2+z^2-2x-2z = (x-1)^2-1+y^2+(z-1)^2-1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 \leq 2$

Klot med radie $\sqrt{2}$ och centrum i $(1,0,1)$.

$x^2+y^2+z^2-2y+4z+4 = x^2+(y-1)^2-1+(z+2)^2-4+4 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2+(y-1)^2+(z+2)^2 \leq 1$

Klot med radie 1 och centrum $(0,1,-2)$.

Notera att avståndet mellan

$(1,0,1)$ och $(0,1,-2)$ är $|(1,0,1)-(0,1,-2)| =$

$= |(1,-1,3)| = \sqrt{1^2+1^2+3^2} = \sqrt{11}$

Men $\sqrt{2}+1 \leq \sqrt{11}$ $\quad (\sqrt{2}+1 \approx 2.4,\ \sqrt{11} > \sqrt{9} = 3)$. 1

Alltså kan inte kloten skära varandra!