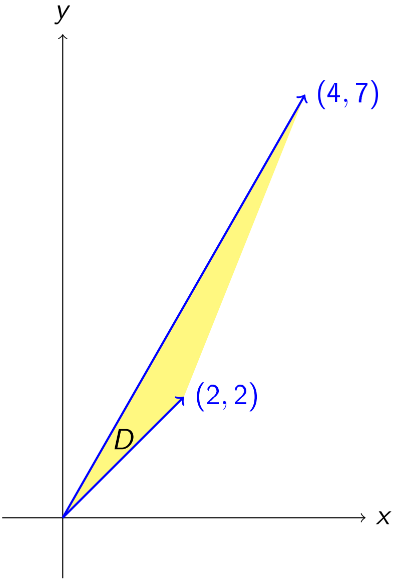
Exempel

Beräkna

$$\iint_D y dx dy$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0),(2,2)$ och $(4,7)$.

Lösning



Lösning

Vi använder $(2, 2), (4, 7)$ som ny bas.

Lösning

Vi använder $(2,2),(4,7)$ som ny bas.
D.v.s. vi inför nya koordinater (u,v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Lösning

Vi använder $(2,2),(4,7)$ som ny bas.
D.v.s. vi inför nya koordinater (u,v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Om vi inverterar detta samband får vi

$$\begin{cases} u &= \frac{7x-4y}{6} \\ v &= \frac{y-x}{3}. \end{cases}$$

Lösning

Vi använder $(2,2),(4,7)$ som ny bas.
D.v.s. vi inför nya koordinater (u,v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Om vi inverterar detta samband får vi

$$\begin{cases} u &= \frac{7x-4y}{6} \\ v &= \frac{y-x}{3}. \end{cases}$$

Punkterna med koordinater $(0,0),(2,2)$ och $(4,7)$ i xy-planet avbildas via denna transformation på punkterna $(0,0),(1,0)$ respektive $(0,1)$ i uv-planet.

Lösning

Vi använder $(2,2),(4,7)$ som ny bas.
D.v.s. vi inför nya koordinater (u,v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Om vi inverterar detta samband får vi

$$\begin{cases} u & = & \frac{7x-4y}{6} \\ v & = & \frac{y-x}{3}. \end{cases}$$

Punkterna med koordinater $(0,0),(2,2)$ och $(4,7)$ i xy-planet avbildas via denna transformation på punkterna $(0,0),(1,0)$ respektive $(0,1)$ i uv-planet.
Alltså transformeras D till triangeln Ω i uv-planet med hörn i dessa punkter:

$$\Omega = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1-u\}.$$

Lösning

Vi använder $(2,2),(4,7)$ som ny bas.
D.v.s. vi inför nya koordinater (u,v) sådana att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

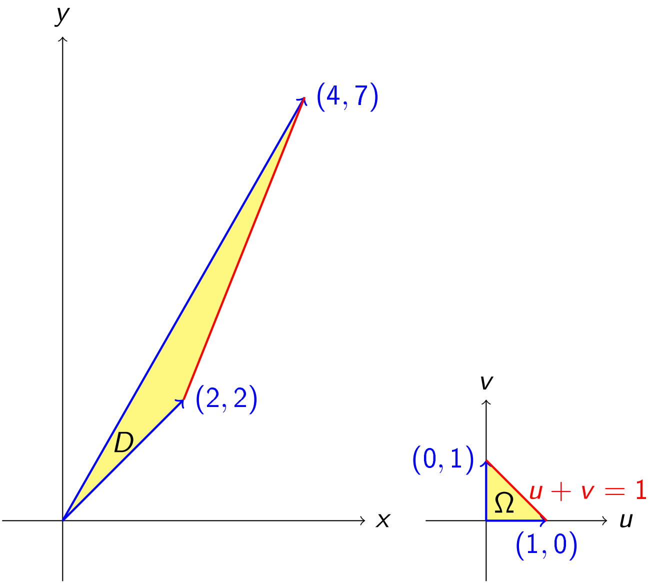
Om vi inverterar detta samband får vi

$$\begin{cases} u &= \frac{7x-4y}{6} \\ v &= \frac{y-x}{3}. \end{cases}$$

Punkterna med koordinater $(0,0),(2,2)$ och $(4,7)$ i xy-planet avbildas via denna transformation på punkterna $(0,0),(1,0)$ respektive $(0,1)$ i uv-planet.
Alltså transformeras D till triangeln Ω i uv-planet med hörn i dessa punkter:

$$\Omega = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1-u\}.$$

Lösning



Lösning

$$dxdy = \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| dudv$$

Lösning

$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = | \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} | dudv$$

Lösning

$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = |\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}| dudv = 6dudv.$$

$$\iint_D ydxdy = \iint_\Omega (2u+7v)6dudv$$

Lösning

$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = |\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}| dudv = 6dudv.$$

$$\iint_D ydxdy = \iint_\Omega (2u+7v)6dudv =$$

$$6\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (2u+7v)dv\right) du$$

Lösning

$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = |\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}| dudv = 6dudv.$$

$$\iint_D ydxdy = \iint_\Omega (2u+7v)6dudv =$$
$$6\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (2u+7v)dv\right) du = 6\int_0^1 \left[2uv + \frac{7v^2}{2}\right]_{v=0}^{1-u} du$$

Lösning

$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = |\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}| dudv = 6dudv.$$

$$\iint_D ydxdy = \iint_\Omega (2u+7v)6dudv =$$
$$6\int_0^1 \left(\int_0^{1-u}(2u+7v)dv\right)du = 6\int_0^1 \left[2uv + \frac{7v^2}{2}\right]_{v=0}^{1-u} du =$$
$$6\int_0^1 (2u(1-u) + \frac{7(1-u)^2}{2})du$$

Lösning

$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = |\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}| dudv = 6dudv.$$

$$\iint_D ydxdy = \iint_\Omega (2u+7v)6dudv =$$
$$6\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (2u+7v)dv\right) du = 6\int_0^1 \left[2uv + \frac{7v^2}{2}\right]_{v=0}^{1-u} du =$$
$$6\int_0^1 (2u(1-u) + \frac{7(1-u)^2}{2})du = \ldots = 9.$$