Exempel

Låt D vara den mängd i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av paraboloiderna $z = x^2 + y^2$ och $z = 2 - x^2 - y^2$.
Skriv integralen

$$I = \iiint_D f(x, y, z)dxdydz$$

dels med hjälp av stavar:

$$I = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{A(x,y)}^{B(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy,$$

dels med hjälp av skivor:

$$\int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z)dxdy \right) dz.$$

Beräkna sedan på valfritt sätt I då $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Bild av D

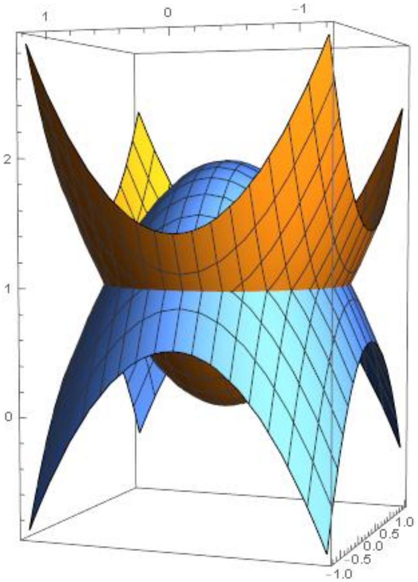
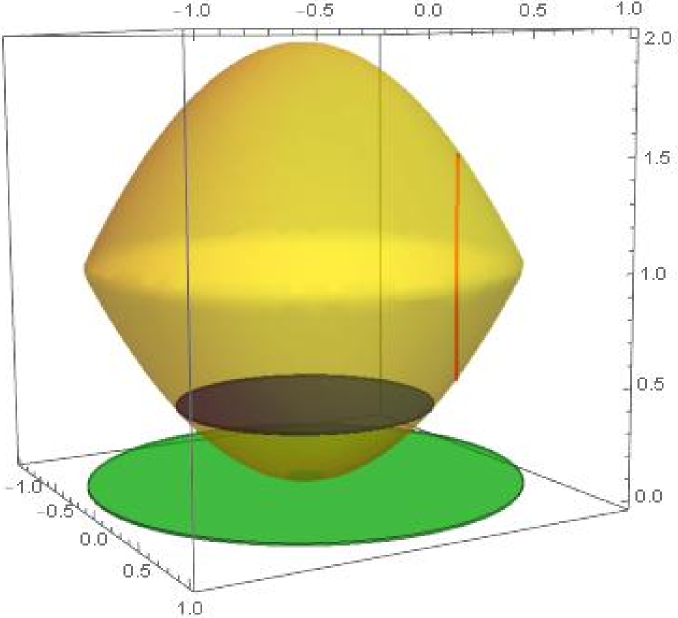


Bild av D



Lösning

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Lösning

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

$$\widetilde{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Lösning

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

$$\widetilde{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$A(x, y) = x^2 + y^2, \quad B(x, y) = 2 - x^2 - y^2.$$

Lösning

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

$$\widetilde{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$A(x, y) = x^2 + y^2, \quad B(x, y) = 2 - x^2 - y^2.$$

$$0 \leq z \leq 2.$$

Lösning

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

$$\widetilde{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$A(x, y) = x^2 + y^2, \quad B(x, y) = 2 - x^2 - y^2.$$

$$0 \leq z \leq 2.$$

$$D_z = \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z & 0 \leq z \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 2 - z & 1 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

Lösning

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

$$\widetilde{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$A(x, y) = x^2 + y^2, \quad B(x, y) = 2 - x^2 - y^2.$$

$$0 \leq z \leq 2.$$

$$D_z = \begin{cases} x^2 + y^2 \leq z & 0 \leq z \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 2 - z & 1 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

Lösning

$$I = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

Lösning

$$I = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f(x,y,z)dz \right) dxdy = \int_0^2 \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz$$

Lösning

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f(x,y,z)dz\right)dxdy = \\
&\int_0^2\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right)dz = \\
&\int_0^1\left(\iint_{x^2+y^2\leq z} f(x,y,z)dxdy\right)dz + \\
&+\int_1^2\left(\iint_{x^2+y^2\leq 2-z} f(x,y,z)dxdy\right)dz.
\end{aligned}
$$

Lösning

Vi använder metoden med stavar.

Lösning

Vi använder metoden med stavar.

$$\iiint_D (x^2 + y^2)dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)dz \right) dxdy$$

Lösning

Vi använder metoden med stavar.

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)dz\right)dxdy$$

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)((2-x^2-y^2)-(x^2+y^2))dxdy$$

Lösning

Vi använder metoden med stavar.

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)dz\right)dxdy$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)((2-x^2-y^2)-(x^2+y^2))dxdy =$$

$$2\iint_{x^2+y^2\le 1}((x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2)dxdy$$

Lösning

Vi använder metoden med stavar.

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)dz\right)dxdy$$

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)((2-x^2-y^2)-(x^2+y^2))dxdy =$$

$$2\iint_{x^2+y^2\leq 1}((x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2)dxdy = /\text{Polära koordinater}/ =$$

Lösning

Vi använder metoden med stavar.

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)dz\right)dxdy$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)((2-x^2-y^2)-(x^2+y^2))dxdy =$$

$$2\iint_{x^2+y^2\le 1}((x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2)dxdy = /\text{Polära koordinater}/ =$$

$$2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(\rho^2-\rho^4)\rho d\rho\right)d\theta$$

Lösning

Vi använder metoden med stavar.

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)dz\right)dxdy$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)((2-x^2-y^2)-(x^2+y^2))dxdy =$$

$$2\iint_{x^2+y^2\le 1}((x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2)dxdy = /\text{Polära koordinater}/ =$$

$$2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(\rho^2-\rho^4)\rho d\rho\right)d\theta = 4\pi\left[\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1$$

Lösning

Vi använder metoden med stavar.

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)dz\right)dxdy$$

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)((2-x^2-y^2)-(x^2+y^2))dxdy =$$

$$2\iint_{x^2+y^2\leq 1}((x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2)dxdy = /\text{Polära koordinater}/ =$$

$$2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(\rho^2-\rho^4)\rho d\rho\right)d\theta = 4\pi\left[\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \ldots = \frac{\pi}{3}.$$