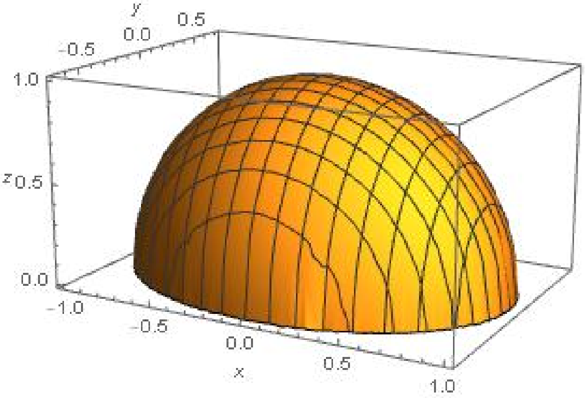
Exempel

Beskriv funktionsytan $z = f(x, y)$ där $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.
Bestäm även definitionsmängden D_f och värdemängden V_f.
Beskriv slutligen nivåkurvorna till $f(x, y)$.

Graf till $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$



Lösning: D_f

$$z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}.$$

Lösning: D_f

$z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.
D_f ges av att $1 - x^2 - 2y^2 \geq 0$

Lösning: D_f

$z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.
D_f ges av att $1 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 \leq 1$.

Lösning: D_f

$z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.
D_f ges av att $1 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 \leq 1$. Detta är en ellips.

Lösning: D_f

$z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.
D_f ges av att $1 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 \leq 1$. Detta är en ellips.
Vi kan även skriva

$$D_f = \left\{ (x, y) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{\frac{1 - x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{1 - x^2}{2}} \right\}$$

Lösning: D_f

$z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.
D_f ges av att $1 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 \leq 1$. Detta är en ellips.
Vi kan även skriva

$$D_f = \left\{ (x, y) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{\frac{1 - x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{1 - x^2}{2}} \right\} =$$

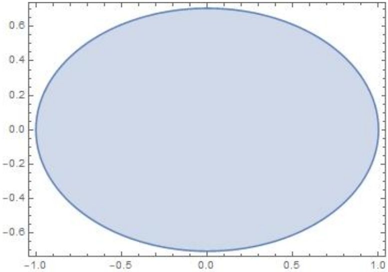
$$\left\{ (x, y) : -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{1 - 2y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - 2y^2} \right\}.$$

Lösning: D_f

$z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$.
D_f ges av att $1 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 \leq 1$. Detta är en ellips.
Vi kan även skriva

$$D_f = \left\{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{\frac{1-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right\} =$$

$$\left\{(x,y) : -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{1-2y^2} \leq x \leq \sqrt{1-2y^2}\right\}.$$



Lösning: V_f

Eftersom z är noll på randen till denna ellips, och $1 - x^2 - 2y^2 \leq 1$ där värdet 1 antas i $(0, 0)$ ser vi att $0 \leq z \leq 1$.

Lösning: V_f

Eftersom z är noll på randen till denna ellips, och $1 - x^2 - 2y^2 \leq 1$ där värdet 1 antas i $(0, 0)$ ser vi att $0 \leq z \leq 1$.
Det är lätt att inse att alla värden mellan dessa antas så

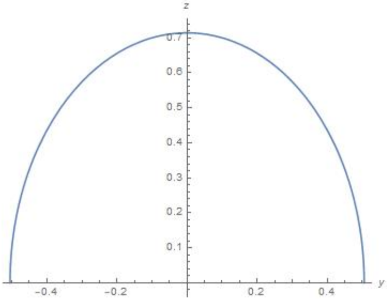
$$V_f = [0, 1].$$

Kurvor på formen $f(a, y)$, $f(x, b)$

För att förstå den tredimensionella grafen är det bra att först titta på graferna $f(a, y)$ och $f(x, b)$ för några fixa a respektive b.

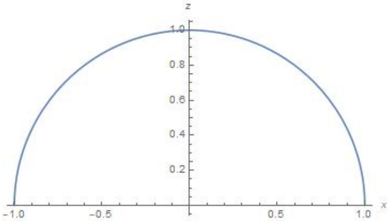
Kurvor på formen $f(a, y)$, $f(x, b)$

För att förstå den tredimensionella grafen är det bra att först titta på graferna $f(a, y)$ och $f(x, b)$ för några fixa a respektive b.
T.ex. med $a = 0.7$ skulle vi få
$f(0.7, y) = \sqrt{1 - (0.7)^2 - 2y^2} = \sqrt{0.51 - 2y^2}$ som plottad i yz-planet har grafen:



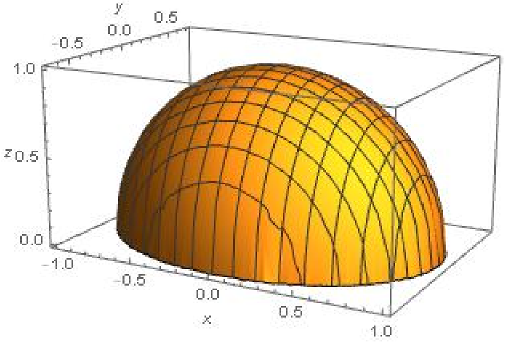
Kurvor på formen $f(a, y)$, $f(x, b)$

Med $b = 0$ skulle vi få $f(x, 0) = \sqrt{1 - x^2}$ som plottad i xz-planet har grafen:



Graf

Om man plottar ut sådana kurvor $(a, y, f(a, y))$ respektive $(x, b, f(x, b))$ för några lämpligt valda värden på a respektive b bildas ett rutnät som ligger på grafen, och från detta kan man sedan få en vettig plot:



Nivåkurvor

Nivåkurvorna ges som lösningar till ekvationen
$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-2y^2} = c \Leftrightarrow 1-x^2-2y^2 = c^2.$

Nivåkurvor

Nivåkurvorna ges som lösningar till ekvationen
$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2} = c \Leftrightarrow 1 - x^2 - 2y^2 = c^2$.
Dessa är då ellipser $x^2 + 2y^2 = 1 - c^2$ för $c \in [0, 1[$, och endast punkten $(0, 0)$ om $c = 1$.

Nivåkurvor

Nivåkurvorna ges som lösningar till ekvationen
$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2} = c \Leftrightarrow 1 - x^2 - 2y^2 = c^2$.
Dessa är då ellipser $x^2 + 2y^2 = 1 - c^2$ för $c \in [0, 1[$, och endast punkten $(0, 0)$ om $c = 1$.