Implicita funktionssatsen

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Nivåkurvor

Om vi ser på $F(x, y) = k$ är detta ”typiskt” en kurva.

Nivåkurvor

Om vi ser på $F(x, y) = k$ är detta "typiskt" en kurva.Men

- om $F(x, y) = k$ för varje (x, y) blir detta hela $\mathbb{R}^2$,

Nivåkurvor

Om vi ser på $F(x, y) = k$ är detta "typiskt" en kurva.Men

- om $F(x, y) = k$ för varje (x, y) blir detta hela $\mathbb{R}^2$,
- om $F(x, y) = x^2 + y^2$ och $k = 0$ blir det bara punkten $(0, 0)$.

Nivåkurvor

Om vi ser på $F(x, y) = k$ är detta ”typiskt” en kurva.Men

- om $F(x, y) = k$ för varje (x, y) blir detta hela $\mathbb{R}^2$,
- om $F(x, y) = x^2 + y^2$ och $k = 0$ blir det bara punkten $(0, 0)$.

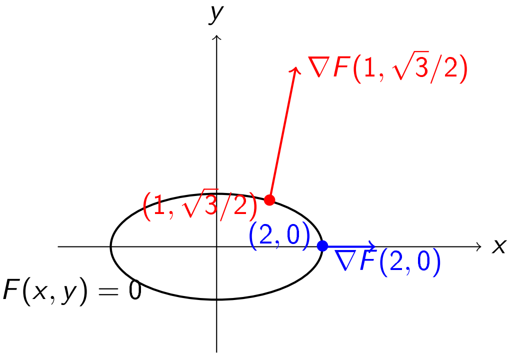
Implicita funktionssatsen ger villkor på en punkt (a, b) som ligger på nivåkurvan $F(x, y) = k$ för att denna kurva lokalt kring (a, b) ska vara en kurva och t.ex. definieras av en graf $y = f(x)$, och allmännare liknande påståenden i flera variabler.

Exempel

$$F(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$

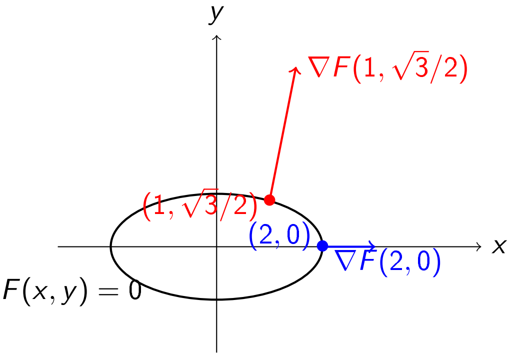
Exempel

$$F(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$



Exempel

$$F(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$



Notera att de punkter på kurvan där vi lokalt inte kan lösa ut y som funktion av x är precis punkterna $\pm(2,0)$ eftersom vi runt dessa kommer ha två olika y-värden. Det som kännetecknar dessa punkter är just att $F'_y = 0$ här.

En ekvation med två variabler

Sats (Implicita funktionssatsen)

Om $F(x, y)$ är en reellvärd funktion av klass $\mathcal{C}^k$ sådan att $F(a, b) = 0$ och $F'_y(a, b) \neq 0$, då finns någon omgivning till (a, b) sådan att den del av nivåkurvan $F(x, y) = 0$ som ligger i denna omgivning är grafen till en funktion $y = f(x)$ av klass $\mathcal{C}^k$. Denna funktion uppfyller med andra ord $F(x, f(x)) = 0$ och $b = f(a)$.

En ekvation med två variabler

Sats (Implicita funktionssatsen)

Om $F(x, y)$ är en reellvärd funktion av klass $\mathcal{C}^k$ sådan att $F(a, b) = 0$ och $F'_y(a, b) \neq 0$, då finns någon omgivning till (a, b) sådan att den del av nivåkurvan $F(x, y) = 0$ som ligger i denna omgivning är grafen till en funktion $y = f(x)$ av klass $\mathcal{C}^k$. Denna funktion uppfyller med andra ord $F(x, f(x)) = 0$ och $b = f(a)$.

Implicit derivering:

Sats (Implicita funktionssatsen)

Om $F(x, y)$ är en reellvärd funktion av klass $\mathcal{C}^k$ sådan att $F(a, b) = 0$ och $F'_y(a, b) \neq 0$, då finns någon omgivning till (a, b) sådan att den del av nivåkurvan $F(x, y) = 0$ som ligger i denna omgivning är grafen till en funktion $y = f(x)$ av klass $\mathcal{C}^k$. Denna funktion uppfyller med andra ord $F(x, f(x)) = 0$ och $b = f(a)$.

Implicit derivering: Om $F(x, y)$ och $y = f(x)$ uppfyller $b = f(a)$ och $F(x, f(x)) = 0$ för x nära a,

En ekvation med två variabler

Sats (Implicita funktionssatsen)

Om $F(x, y)$ är en reellvärd funktion av klass $\mathcal{C}^k$ sådan att $F(a, b) = 0$ och $F'_y(a, b) \neq 0$, då finns någon omgivning till (a, b) sådan att den del av nivåkurvan $F(x, y) = 0$ som ligger i denna omgivning är grafen till en funktion $y = f(x)$ av klass $\mathcal{C}^k$. Denna funktion uppfyller med andra ord $F(x, f(x)) = 0$ och $b = f(a)$.

Implicit derivering: Om $F(x, y)$ och $y = f(x)$ uppfyller $b = f(a)$ och $F(x, f(x)) = 0$ för x nära a, i så fall gäller enligt kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}0 = 0.$$

Sats (Implicita funktionssatsen)

Om $F(x, y)$ är en reellvärd funktion av klass $\mathcal{C}^k$ sådan att $F(a, b) = 0$ och $F'_y(a, b) \neq 0$, då finns någon omgivning till (a, b) sådan att den del av nivåkurvan $F(x, y) = 0$ som ligger i denna omgivning är grafen till en funktion $y = f(x)$ av klass $\mathcal{C}^k$. Denna funktion uppfyller med andra ord $F(x, f(x)) = 0$ och $b = f(a)$.

Implicit derivering: Om $F(x, y)$ och $y = f(x)$ uppfyller $b = f(a)$ och $F(x, f(x)) = 0$ för x nära a, i så fall gäller enligt kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}0 = 0.$$

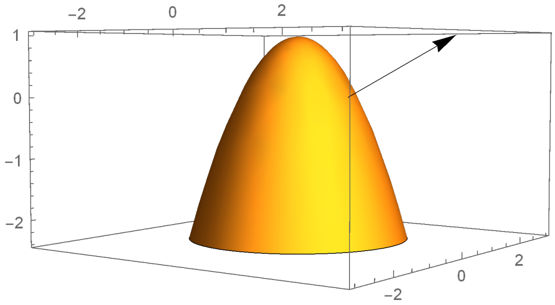
Om nu $F'_y(a, b) \neq 0$ får vi (eftersom $b = f(a)$):

$$f'(a) = -\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)}.$$

En ekvation med tre variabler

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\nabla F(a, b, c) = (F'_x(a, b, c), F'_y(a, b, c), F'_z(a, b, c))$$



En ekvation med tre variabler

Sats (Implicita funktionssatsen)

Om $F(x, y, z)$ *är en reellvärd funktion av klass* $\mathcal{C}^k$ *sådan att* $F(a, b, c) = 0$ *och* $F'_z(a, b, c) \neq 0$*, då finns någon omgivning till* (a, b, c) *sådan att den del av nivåytan* $F(x, y, z) = 0$ *som ligger i denna omgivning är grafen till en funktion* $z = f(x, y)$ *av klass* $\mathcal{C}^k$*. Denna funktion uppfyller med andra ord* $F(x, y, f(x, y)) = 0$ *och* $c = f(a, b)$*.*

En ekvation med tre variabler

Sats (Implicita funktionssatsen)

Om $F(x,y,z)$ är en reellvärd funktion av klass C^k sådan att $F(a,b,c)=0$ och $F_z'(a,b,c)\neq 0$, då finns någon omgivning till (a,b,c) sådan att den del av nivåytan $F(x,y,z)=0$ som ligger i denna omgivning är grafen till en funktion $z=f(x,y)$ av klass C^k. Denna funktion uppfyller med andra ord $F(x,y,f(x,y))=0$ och $c=f(a,b)$.

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,f(x,y))=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

Om nu $F_z'(a,b,c)\neq 0$ får vi

$$f_y'(a,b)=-\frac{F_y'(a,b,c)}{F_z'(a,b,c)}$$

En ekvation med tre variabler

Sats (Implicita funktionssatsen)

Om $F(x, y, z)$ är en reellvärd funktion av klass $\mathcal{C}^k$ sådan att $F(a, b, c) = 0$ och $F'_z(a, b, c) \neq 0$, då finns någon omgivning till (a, b, c) sådan att den del av nivåytan $F(x, y, z) = 0$ som ligger i denna omgivning är grafen till en funktion $z = f(x, y)$ av klass $\mathcal{C}^k$. Denna funktion uppfyller med andra ord $F(x, y, f(x, y)) = 0$ och $c = f(a, b)$.

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x, y, f(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Om nu $F'_z(a, b, c) \neq 0$ får vi

$$f'_y(a, b) = -\frac{F'_y(a, b, c)}{F'_z(a, b, c)}, \quad f'_x(a, b) = -\frac{F'_x(a, b, c)}{F'_z(a, b, c)}.$$

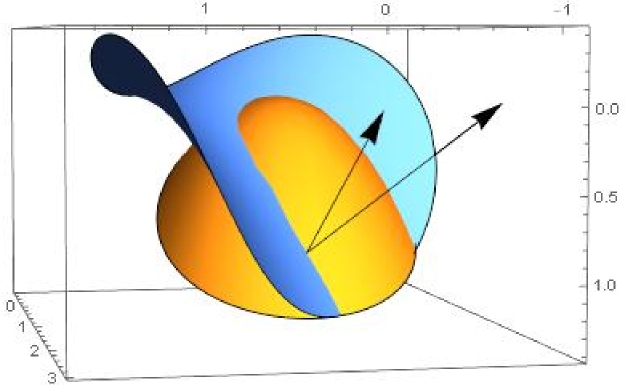
Två ekvationer, tre variabler

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Två ekvationer, tre variabler

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla F \times \nabla G = \left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \right).$$



Två ekvationer, tre variabler

Sats (Implicita funktionssatsen)

Antag att F, G *av klass* $\mathcal{C}^k$ *uppfyller*

$$\begin{cases} F(a,b,c) = 0 \\ G(a,b,c) = 0 \end{cases} \quad och \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a,b,c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a,b,c) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Då finns det en omgivning till (a,b,c) *sådan att lösningarna till ekvationssystemet*

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

som ligger i dennna omgivning är en parameterkurva på formen $y = f(x)$, $z = g(x)$. *Vi har alltså*

$$\begin{cases} F(x,f(x),g(x)) & = & 0 \\ G(x,f(x),g(x)) & = & 0 \end{cases} \quad och \quad \begin{cases} b & = & f(a) \\ c & = & g(a). \end{cases}$$

Implicit derivering, två ekvationer, tre variabler

$$\begin{cases} F(x, f(x), g(x)) &= 0 \\ G(x, f(x), g(x)) &= 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} b &= f(a) \\ c &= g(a), \end{cases}$$

Implicit derivering, två ekvationer, tre variabler

$$\begin{cases} F(x, f(x), g(x)) & = & 0 \\ G(x, f(x), g(x)) & = & 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} b & = & f(a) \\ c & = & g(a), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}F(x, f(x), g(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dg}{dx} = 0 \\ \frac{d}{dx}G(x, f(x), g(x)) = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{dg}{dx} = 0. \end{cases}$$

Implicit derivering, två ekvationer, tre variabler

$$\begin{cases} F(x, f(x), g(x)) & = & 0 \\ G(x, f(x), g(x)) & = & 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} b & = & f(a) \\ c & = & g(a), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} F(x, f(x), g(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dg}{dx} = 0 \\ \frac{d}{dx} G(x, f(x), g(x)) = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{dg}{dx} = 0. \end{cases}$$

Om nu

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a, b, c) \end{vmatrix} \neq 0,$$

då får vi

$$\begin{pmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a, b, c) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_x(a, b, c) \\ G'_x(a, b, c) \end{pmatrix}.$$

Notera att antagandet att vi har homogena ekvationer/ekvationssystem är utan förlust då vi kan titta på $F - k$ istället.

Notera att antagandet att vi har homogena ekvationer/ekvationssystem är utan förlust då vi kan titta på $F - k$ istället.
Det går också bra att byta roll på variablerna. T.ex. om vi har en funktion $F(x, y)$ sådan att $F(a, b) = k$ och $F'_x(a, b) \neq 0$ då ges nivåkurvan lokalt som en graf $x = g(y)$ istället. Jämför detta i ellipsfallet ovan. Lokalt runt punkterna $\pm(2, 0)$ går det bra att lösa ut x som funktion av y.

Implicita funktionssatsen, allmän form*

Låt $\bar{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ vara en funktion av $m + n$ variabler $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ av klass $\mathcal{C}^k$ i någon omgivning till punkten $(\bar{a}, \bar{b})$ ($\bar{a} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$) sådan att $\bar{F}(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{0}$ och funktionaldeterminanten

$$\frac{d\bar{F}}{d\bar{y}}(\bar{a}, \bar{b}) \neq 0,$$

då finns i någon omgivning till punkten $\bar{a}$ exakt en funktion $\bar{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ (av m variabler med värden i $\mathbb{R}^n$) av klass $\mathcal{C}^k$ sådana att i denna omgivning gäller

$$\bar{b} = \bar{f}(\bar{a}), \quad \bar{F}(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x})) = \bar{0}$$

och

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} = -\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}\right)^{-1} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_j} \text{ för } j = 1, 2, \ldots, m.$$