Dubbelintegraler

Flervariabelanalys

Linköpings Universitet

Vad vi i alla dessa fall har är dels ett **begränsat** område $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ och en **begränsad** reellvärd funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, och vi vill definiera

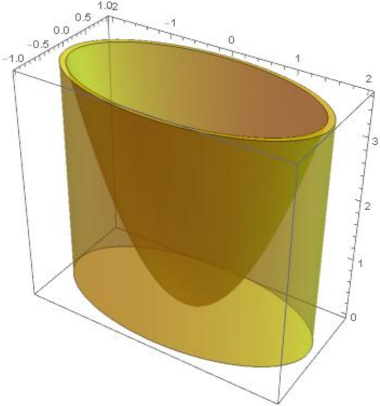
$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_\Omega fdxdy$$

så att ifall f är positiv på Ω, då ska detta ge **volymen under grafen till f över Ω**.

Volymtolkning i 2D

Om $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 4\}$, som är en ellips, och $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ är vår funktion, så ska dubbelintegralen alltså ge oss volymen av den tredimensionella kroppen som ges av

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + 4y^2, x^2 + 4y^2 < 4\} :$$



Approximation

Antag att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett ändligt antal rektanglar $K_1, K_2, \dots, K_l$ i Ω som inte skär varandra (d.v.s. $K_i \cap K_j = \emptyset$ om $i \neq j$) sådana att

(1) Arean av $\Omega \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_l)$ är mindre än ε,

(2) det finns tal $a_1, a_2, \dots, a_l$ sådana att $|f(x,y) - a_i| < \varepsilon$ för all $(x,y) \in K_i$,

I så fall gäller att

$$\iint_\Omega f dx dy \approx \sum_{i=1}^{l} a_i m(K_i),$$

där felet i denna approximation $\leq (C + m(\Omega))\varepsilon$ där $|f| \leq C$ på Ω.

Approximation

Antag att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett ändligt antal rektanglar $K_1, K_2, \ldots, K_l$ i Ω som inte skär varandra (d.v.s. $K_i \cap K_j = \emptyset$ om $i \neq j$) sådana att

(1) Arean av $\Omega \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_l)$ är mindre än ε,

(2) det finns tal $a_1, a_2, \ldots, a_l$ sådana att $|f(x,y) - a_i| < \varepsilon$ för all $(x,y) \in K_i$,

I så fall gäller att

$$\iint_\Omega f dx dy \approx \sum_{i=1}^{l} a_i m(K_i),$$

där felet i denna approximation $\leq (C + m(\Omega))\varepsilon$ där $|f| \leq C$ på Ω.
Med en rektangel K ovan menar vi en axelparallell rektangel:

$$\{(x,y) : a < x < b, c < y < d\} \subset K \subset \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

Approximation

Antag att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett ändligt antal rektanglar $K_1, K_2, \ldots, K_l$ i Ω som inte skär varandra (d.v.s. $K_i \cap K_j = \emptyset$ om $i \neq j$) sådana att

(1) Arean av $\Omega \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_l)$ är mindre än ε,

(2) det finns tal $a_1, a_2, \ldots, a_l$ sådana att $|f(x,y) - a_i| < \varepsilon$ för all $(x,y) \in K_i$,

I så fall gäller att

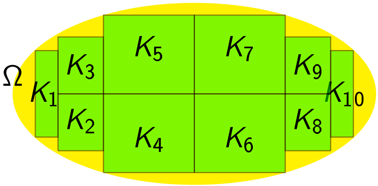
$$\iint_\Omega f dx dy \approx \sum_{i=1}^{l} a_i m(K_i),$$

där felet i denna approximation $\leq (C + m(\Omega))\varepsilon$ där $|f| \leq C$ på Ω.
Med en rektangel K ovan menar vi en axelparallell rektangel:

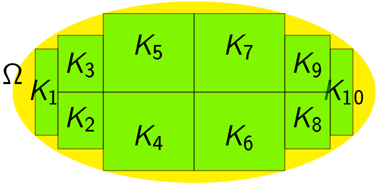
$$\{(x,y) : a < x < b, c < y < d\} \subset K \subset \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

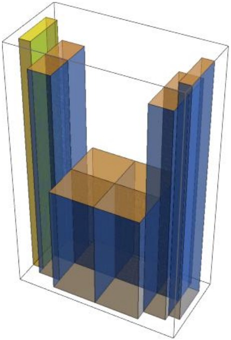
$$m(K) = (b-a)(d-c).$$

Volymtolkning i 2D



Volymtolkning i 2D





Sats

(1) $\iint_\Omega (af+bg)dxdy = a\iint_\Omega fdxdy + b\iint_\Omega gdxdy$ ($a, b \in \mathbb{R}$, f, g integrabla).

(2) $\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} fdxdy = \iint_{\Omega_1} fdxdy + \iint_{\Omega_2} fdxdy$ ($\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, f integrabel).

(3) $f \leq g \Rightarrow \iint_\Omega fdxdy \leq \iint_\Omega gdxdy$ (f, g integrabla). Speciellt $\iint_\Omega fdxdy \geq 0$ om $f \geq 0$.

(4) $\iint_\Omega dxdy =$ Arean av Ω.

(5) (Triangelolikheten) $\left|\iint_\Omega fdxdy\right| \leq \iint_\Omega |f|dxdy$ (f integrabel).

Fubinis sats för dubbelintegraler

Sats (Fubini)

Om $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ *så gäller att*

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

om f *är integrabel.*

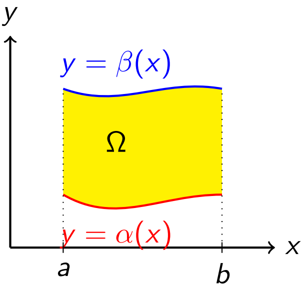
Fubinis sats för dubbelintegraler

Sats (Fubini)

Om $\Omega = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ *så gäller att*

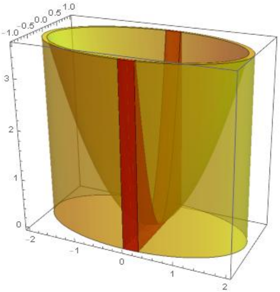
$$\iint_\Omega f dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

om f *är integrabel.*



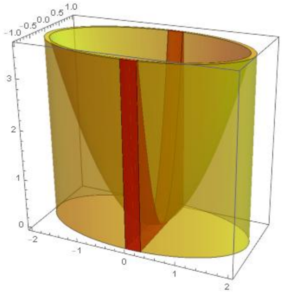
$$\Omega = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

Fubinis sats

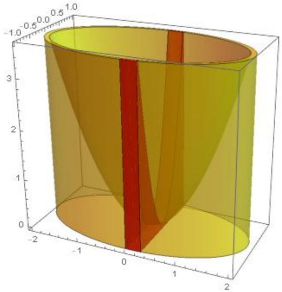


För varje x i $[r, r + \Delta x]$ ges tvärsnittsarean av $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy$.

Fubinis sats



För varje x i $[r, r+\Delta x]$ ges tvärsnittsarean av $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$.
Volymen av denna del av kroppen borde alltså vara ungefär $\left(\int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r,y)dy\right)\Delta x$.



För varje x i $[r, r + \Delta x]$ ges tvärsnittsarean av $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy$. Volymen av denna del av kroppen borde alltså vara ungefär $\left(\int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r, y)dy\right) \Delta x$.
Om man styckar upp $[a, b]$ i sådana små Δx-bitar och summerar alla dessa approximationer får man just en approximation av uttycket $\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy\right) dx$.