Dugga 2 i TATM79, 2013-09-30, lösningsförslag

1. (a) $(a-1)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^{7-k}(-1)^k = \binom{7}{0} a^7 \cdot (-1)^0 + \binom{7}{1} a^6 \cdot (-1)^1 + \binom{7}{2} a^5 \cdot (-1)^2 +$
$\binom{7}{3} a^4 \cdot (-1)^3 + \binom{7}{4} a^3 \cdot (-1)^4 + \binom{7}{5} a^2 \cdot (-1)^5 + \binom{7}{6} a \cdot (-1)^6 + \binom{7}{7} \cdot (-1)^7 =$
$= \Big/$binomialkoefficienterna hämtas enklast ur Pascals triangel$\Big/ =$
$= a^7 - 7a^6 + 21a^5 - 35a^4 + 35a^3 - 21a^2 + 7a - 1$

Svar: $a^7 - 7a^6 + 21a^5 - 35a^4 + 35a^3 - 21a^2 + 7a - 1$.

(b) $\sum_{k=2}^{130} 6 \cdot 2^{2k} = \sum_{k=2}^{130} 6 \cdot (2^2)^k = \sum_{k=2}^{130} 6 \cdot 4^k = 6 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4^3 + \cdots + 6 \cdot 4^{130}$.
Vi ser att detta är en geometrisk summa med första term $= 6 \cdot 4^2$, kvot $= 4$ och med $130-2+1 = 129$ termer. Alltså är summan lika med $6 \cdot 4^2 \cdot \dfrac{4^{129}-1}{4-1} = 32 \cdot (4^{129}-1)$.

Svar: $32 \cdot (4^{129} - 1)$.

(c) $1 + i\dfrac{i+1}{2i-1} = 1 + i\dfrac{(i+1)(-2i-1)}{(2i-1)(-2i-1)} = 1 + \dfrac{i(1-3i)}{5} = \dfrac{5+i+3}{5} = \dfrac{8}{5} + \dfrac{1}{5}i$, så
$\operatorname{Re}\left(1 + i\dfrac{i+1}{2i-1}\right) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{8+i}{5}\right) = \dfrac{8}{5}$.

Svar: $\dfrac{8}{5}$.

2. (a) $2^{2x+2} - 2^{x+3} = 21 \iff 2^2 \cdot 2^{2x} - 2^3 \cdot 2^x = 21 \iff 4 \cdot (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x = 21 \iff$
$\iff \Big/$sätt $t = 2^x > 0\Big/ \iff \begin{cases} 4t^2 - 8t - 21 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t^2 - 2t - \dfrac{21}{4} = 0 \\ t > 0 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} t = 1 \pm \sqrt{1 + \dfrac{21}{4}} \\ t > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \pm \dfrac{5}{2} \\ t > 0 \end{cases} \iff t = \dfrac{7}{2} \iff 2^x = \dfrac{7}{2} \iff$
$\iff \Big/$ln är injektiv$\Big/ \iff \ln 2^x = \ln \dfrac{7}{2} \iff x \ln 2 = \ln 7 - \ln 2 \iff$
$\iff x = \dfrac{\ln 7 - \ln 2}{\ln 2} = \dfrac{\ln 7}{\ln 2} - 1$

Svar: $x = \dfrac{\ln 7}{\ln 2} - 1$.

(b) Logaritmerna är definierade förutsatt att $1 - x > 0$, $x + 6 > 0$ och $-x > 0$, dvs då $-6 < x < 0$. För dessa x fås
$\ln(1-x) + \ln(x+6) + 2\ln\dfrac{1}{2} = 2\ln(-x) + \ln 6 \iff$
$\iff \ln(1-x) + \ln(x+6) + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \ln(-x)^2 + \ln 6 \iff$
$\iff \ln\dfrac{(1-x)(x+6)}{4} = \ln(6 \cdot x^2) \iff \Big/$ln är injektiv$\Big/ \iff$
$\iff \dfrac{(1-x)(x+6)}{4} = 6x^2 \iff 25x^2 + 5x - 6 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{10} \pm \dfrac{5}{10} \iff$
$\iff x = -\dfrac{3}{5}$ eller $x = \dfrac{2}{5}$, men eftersom $-6 < x < 0$ så följer att enda lösningen är $x = -\dfrac{3}{5}$.

Svar: $x = -\dfrac{3}{5}$.

3. $f(x)$ är definierad då $2 - e^{-x} \geq 0 \iff e^{-x} \leq 2 \iff \Big/ \text{ln är injektiv} \Big/ \iff$

$\iff -x \leq \ln 2 \iff x \geq -\ln 2$. För dessa x fås att $y = \sqrt{2 - e^{-x}} \implies$
$\implies y^2 = 2 - e^{-x} \iff e^{-x} = 2 - y^2 \iff -x = \ln\left(2 - y^2\right) \iff x = -\ln\left(2 - y^2\right)$
dvs ekvationen $y = f(x)$ har högst en lösning för varje y vilket visar att f är injektiv och att $f^{-1}(y) = -\ln\left(2 - y^2\right)$.

Svar: $D_f = \{x : x \geq -\ln 2\}$, $f^{-1}(x) = -\ln\left(2 - x^2\right)$.

4. (a) $$\sin\left(3t + \frac{\pi}{5}\right) = \sin 2t \iff \begin{cases} 3t + \frac{\pi}{5} = 2t + n2\pi \\ \text{eller} \\ 3t + \frac{\pi}{5} = \pi - 2t + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} t = -\frac{\pi}{5} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 5t = \frac{4\pi}{5} + n2\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = -\frac{\pi}{5} + n2\pi \\ \text{eller} \\ t = \frac{4\pi}{25} + \frac{n2\pi}{5} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.} \qquad \text{Svar: } \begin{cases} t = -\frac{\pi}{5} + n2\pi \\ \text{eller} \\ t = \frac{4\pi}{25} + \frac{n2\pi}{5} \end{cases}, \ n \text{ heltal.}$$

(b) Eftersom $2 > 0$ så är $0 < \arctan 2 < \frac{\pi}{2}$, och därmed kan $\arctan 2$ illustreras i en rätvinklig triangel med motstående katet $= 2$, närliggande katet $= 1$ och hypotenusa $= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ (**gör det!**). Alltså är $\cos(\arctan 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Svar: $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(c) Eftersom $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ och $\sin x \leq 0$ (eftersom $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$) så följer att $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Av detta fås att
$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2\sqrt{6} + 1}{6}$.

Svar: $-\frac{2\sqrt{6} + 1}{6}$.

5. (a) $x^a = e^{a \ln x}$ då $x > 0$ och $a \in \mathrm{R}$.

Svar: $x^a = e^{a \ln x}$.

(b) Låt $w = z + 2^{1/4}$ så fås ekvationen $w^4 = -2i$. Skriv talen på på polär form. Med $w = re^{iv}$, där $r \geq 0$ och v är reellt, och $-2i = 2e^{-i\pi/2}$ fås

$$w^4 = -2i \iff \left(re^{iv}\right)^4 = 2e^{-i\pi/2} \iff r^4 e^{i4v} = 2e^{-i\pi/2} \iff \begin{cases} r^4 = 2, \ r \geq 0 \\ 4v = -\frac{\pi}{2} + n2\pi \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} r = 2^{1/4} \\ v = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \end{cases}$ dvs $w = 2^{1/4} e^{i\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)}$, där n är heltal och $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ ger de fyra olika rötterna till fjärdegradsekvationen.

Slutligen fås att $z = w - 2^{1/4} = 2^{1/4}\left(e^{i\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)} - 1\right)$ där $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Svar: $z = 2^{1/4}\left(e^{i\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)} - 1\right)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

6. Eftersom $3>0$ och $-1<-\frac{2}{\sqrt{5}}<0$ är $0<\arctan 3<\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}<\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)<\pi$ dvs $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Dessutom är $\tan\alpha=\frac{\tan(\arctan 3)+\tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{1-\tan(\arctan 3)\cdot\tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}=$

$=\Big/\tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)=\frac{\sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}=$

$=\frac{\sqrt{1-\frac{4}{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}}=-\frac{1}{2}$, eftersom $\sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)>0\Big/=\frac{3-\frac{1}{2}}{1-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=1$, vilket ger $\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi n$ för något heltal n. Av dessa vinklar är det endast $\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$ som uppfyller villkoret $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, dvs $\alpha=\frac{5\pi}{4}$.

$\Big($*Alternativ:* $\arctan 3$ *är ett argument till talet* $z=1+3i$ *och* $\arccos\left(-2/\sqrt{5}\right)$ *är ett argument till talet* $w=-2+i$. *Alltså är* $(1+3i)(-2+i)=\sqrt{10}e^{i\arctan 3}\cdot\sqrt{5}e^{i\arccos(-2/\sqrt{5})}=$

$=\sqrt{50}\,e^{i\left(\arctan 3+\arccos(-2/\sqrt{5})\right)}$. *Men* $(1+3i)(-2+i)=-5-5i=\sqrt{50}e^{i5\pi/4}$, *så* $\arctan 3+\arccos\left(-2/\sqrt{5}\right)=5\pi/4+n2\pi$ *för något heltal* n. *Av alla dessa är det endast* $5\pi/4$ *som ligger i intervallet* $\pi/2<\alpha<3\pi/2$.$\Big)$

Svar: $\alpha=\frac{5\pi}{4}$.

7. $z^5+z=1\iff z^5+z-1=0$. Femtegradsekvationen har fem lösningar, om man räknar lösningarna med deras multiplicitet. Av dessa är exakt en lösning reell, ty:

- Polynomet $P(z)=z^5+z-1$ har reella koefficienter, så om $P(z)=0$ för något icke-reellt tal z så är även $P(\bar{z})=0$. Av detta följer att det måste finnas minst ett reellt nollställe (ty det finns ett jämnt antal icke-reella nollställen, med multiplicitet räknad).
- Tittar vi på reella z ser vi att $P(z)=z^5+z-1$ är strängt växande, så $P(z)=0$ har högst en reell lösning.

Eftersom $P(0)=-1<0$, $P(1)=1>0$, $P(z)$ är strängt växande och $P(z)=0$ har exakt en lösning, följer att det reella nollstället z_1 uppfyller $0<z_1<1$.

Låt de övriga nollställena vara z_2, z_3, z_4 och z_5 (där $z_2=\bar{z_3}$ och $z_4=\bar{z_5}$). Då kan polynomet faktoriseras: $P(z)=z^5+z-1=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)$ och med $z=0$ fås att $z_1z_2z_3z_4z_5=1$. Således är $|z_1z_2z_3z_4z_5|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|\cdot|z_4|\cdot|z_5|=1$ så $|z_2|\cdot|z_3|\cdot|z_4|\cdot|z_5|=\frac{1}{|z_1|}>1$. Men om $|z_k|\leq 1$ för $k=2,3,4,5$ så blir $|z_2|\cdot|z_3|\cdot|z_4|\cdot|z_5|\leq 1$, vilket ger en motsägelse. Alltså måste minst en av $|z_k|>1$, dvs minst en lösning (minst två, eftersom konjugatet också är en lösning) ligger utanför enhetscirkeln, v.s.v.

$\Big($*Alternativ: Antag motsatsen, dvs att alla* z_k *uppfyller* $|z_k|\leq 1,\ k=1,2,3,4,5$. *Men* $z_1z_2z_3z_4z_5=1$, *så då följer att* $|z_k|=1,\ k=1,2,3,4,5$. *Eftersom ekvationen har minst en reell lösning, måste därmed* $z=1$ *eller* $z=-1$ *vara en lösning. Men kontroll visar att* $P(1)=1\neq 0$ *och* $P(-1)=-3\neq 0$. *Alltså får vi en motsägelse. Alltså måste minst en av* z_k *uppfylla* $|z_k|>1$, v.s.v.$\Big)$