Dugga 2 i TATM79, 2013-10-25, lösningsförslag

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=34}^{378}\left(-3+\frac{k}{2}\right)$ är en aritmetisk summa med första term $= -3+\dfrac{34}{2} = 14$, sista term $= -3+\dfrac{378}{2} = 186$ och med $378-34+1 = 345$ termer. Alltså är summan lika med $\dfrac{14+186}{2}\cdot 345 = 100\cdot 345 = 34\,500$.

Svar: 34 500.

(b) Kalkyl med liggande stolen ger

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & & 2x^2 & + & 2x & + & 4 & & & & & \\
\hline
 & & 2x^4 & & & & & - & 3x & + & 1 & x^2-x-1 \\
- & & (2x^4 & - & 2x^3 & - & 2x^2) & & & & & \\
\cline{3-11}
 & & & & 2x^3 & + & 2x^2 & - & 3x & + & 1 & \\
 & & & - & (2x^3 & - & 2x^2 & - & 2x) & & & \\
\cline{4-11}
 & & & & & & 4x^2 & - & x & + & 1 & \\
 & & & & & - & (4x^2 & - & 4x & - & 4) & \\
\cline{7-11}
 & & & & & & & & 3x & + & 5 &
\end{array}
$$

dvs kvoten är $2x^2+2x+4$ och resten är $3x+5$, så av detta följer att $\dfrac{2x^4-3x+1}{x^2-x-1} = 2x^2+2x+4+\dfrac{3x+5}{x^2-x-1}$.

Svar: $2x^2+2x+4+\dfrac{3x+5}{x^2-x-1}$.

(c) $\left|-1+i\dfrac{(4-i)}{3i-1}\right| = \left|\dfrac{-(3i-1)+i(4-i)}{3i-1}\right| = \left|\dfrac{2+i}{3i-1}\right| = \dfrac{|2+i|}{|3i-1|} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. (a) $\sin 7x = \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{7}\right) \iff \begin{cases} 7x = 3x+\dfrac{\pi}{7}+n2\pi \\ \text{eller} \\ 7x = \pi-\left(3x+\dfrac{\pi}{7}\right)+n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 4x = \dfrac{\pi}{7}+n2\pi \\ \text{eller} \\ 10x = \dfrac{6\pi}{7}+n2\pi \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{28}+\dfrac{n\pi}{2} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{3\pi}{35}+\dfrac{n\pi}{5} \end{cases}$ där n är heltal.

Svar: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{28}+\dfrac{n\pi}{2} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{3\pi}{35}+\dfrac{n\pi}{5} \end{cases}$ där n är heltal.

(b) $4\sin x\cos x = 1 \iff 2\sin 2x = 1 \iff \sin 2x = \dfrac{1}{2} \iff \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{6}+n2\pi \\ \text{eller} \\ 2x = \pi-\dfrac{\pi}{6}+n2\pi \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12}+n\pi \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{5\pi}{12}+n\pi \end{cases}$ där n är heltal. Svar: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12}+n\pi \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{5\pi}{12}+n\pi \end{cases}$ där n är heltal.

(c) Eftersom $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ och $\sin v \leq 0$ (eftersom $\pi < v < 2\pi$) så följer att

$$\sin v = -\sqrt{1-\cos^2 v} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Svar: $-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

3. (a) $2^{3x+2} - 2^{2x+3} - 2^{x+2} - 2^{x+1} - 2^x = 4^{x+1} - 30 \iff$
$\iff 4\cdot(2^x)^3 - 8\cdot(2^x)^2 - 4\cdot 2^x - 2\cdot 2^x - 2^x = 4\cdot(2^x)^2 - 30 \iff$
$\iff 4\cdot(2^x)^3 - 12\cdot(2^x)^2 - 7\cdot 2^x + 30 = 0$. Sätt $t = 2^x > 0$ så fås ekvationen $4t^3 - 12t^2 - 7t + 30 = 0,\ t > 0$. Prövning visar att $t = 2$ är en lösning och polynomdivision ger $4t^3 - 12t^2 - 7t + 30 = 0 \iff 4(t-2)\left(t^2 - t - \dfrac{15}{4}\right) = 0$.

$t^2 - t - \dfrac{15}{4} = 0 \iff t = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{15}{4}} = \dfrac{1 \pm 4}{2} \iff t = \dfrac{5}{2}$ (eller $t = -\dfrac{3}{2}$, men $t > 0$).

Således har vi fått $2^x = 2$ eller $2^x = \dfrac{5}{2}$. Använder vi injektiviteten hos ln så fås

- $2^x = 2 = 2^1 \iff x = 1$.
- $2^x = \dfrac{5}{2} \iff \ln 2^x = \ln\dfrac{5}{2} \iff x\ln 2 = \ln\dfrac{5}{2} \iff x = \dfrac{\ln(5/2)}{\ln 2} =$
$= \dfrac{\ln 5 - \ln 2}{\ln 2} = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} - 1$.

Svar: $x = 1$ eller $x = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} - 1$.

(b) $\ln x$ är definierad då $x > 0$ och $\ln\left(x^2\right)$ är definierad då $x \neq 0$, så vänsterledet är definierat då $x > 0$ För dessa x fås

$(\ln x)^2 - \ln\left(x^2\right) = 1 \iff (\ln x)^2 - 2\ln x = 1 \iff \Big/ \text{sätt } \ln x = t \Big/ \iff$
$\iff t^2 - 2t - 1 = 0 \iff t = 1 \pm \sqrt{2} \iff \ln x = 1 \pm \sqrt{2} \iff x = e^{1\pm\sqrt{2}}$ (och båda dessa uppfyller förstås villkoret $x > 0$).

Svar: $x = e^{1\pm\sqrt{2}}$.

4. $f(x)$ är definierad då $\dfrac{x-4}{1-x} > 0$ och teckentabellen

x		1		4	
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$1-x$	$+$	0	$-$		$-$
$\dfrac{x-4}{1-x}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

visar att olikheten gäller då $1 < x < 4$. För dessa x fås att $y = \ln\dfrac{x-4}{1-x} \iff$
$\iff e^y = \dfrac{x-4}{1-x} \iff (1-x)e^y = x - 4 \iff e^y - xe^y = x - 4 \iff$
$\iff x\left(e^y + 1\right) = e^y + 4 \iff x = \dfrac{e^y+4}{e^y+1}$ dvs ekvationen $y = f(x)$ har högst en lösning för varje y vilket visar att f är injektiv och att $f^{-1}(y) = \dfrac{e^y+4}{e^y+1}$.

Svar: $D_f = \{x : 1 < x < 4\},\ f^{-1}(x) = \dfrac{e^x+4}{e^x+1}$.

5. $\sin x \sin 2x \cos 4x = \Big/ \text{Eulers formler} \Big/ = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \cdot \dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i} \cdot \dfrac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} =$

$= -\dfrac{1}{8}\left(e^{7ix}+e^{-7ix}-e^{5ix}-e^{-5ix}-e^{3ix}-e^{-3ix}+e^{ix}+e^{-ix}\right) =$

$= -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2} - \dfrac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2} - \dfrac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) =$

$= -\dfrac{1}{4}(\cos 7x - \cos 5x - \cos 3x + \cos x).$

Av detta följer att $4\sin x \sin 2x \cos 4x = \cos 3x + \cos 5x \iff$
$\iff -\cos 7x + \cos 5x + \cos 3x - \cos x = \cos 3x + \cos 5x \iff \cos 7x + \cos x = 0 \iff$
$\cos 7x = -\cos x \iff \cos 7x = \cos(x+\pi) \iff 7x = \pm(x+\pi) + n2\pi \iff$

$$\iff \begin{cases} 6x = \pi + n2\pi \\ \text{eller} \\ 8x = -\pi + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{4} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $\sin x \sin 2x \cos 4x = \dfrac{1}{4}(-\cos 7x + \cos 5x + \cos 3x - \cos x).$

Ekvationen har lösningarna $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{4} \end{cases}$ där n är heltal.

6. (a) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ då x är reellt.

(b) $-1-3i = \sqrt{10}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}} - \dfrac{3i}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{10}(\cos x + i \sin x) = \sqrt{10}\, e^{ix},$

$$\text{där} \begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \iff \begin{cases} \tan x = 3 \\ x \text{ ligger i 3:e kvadranten} \end{cases} \iff$$

$\iff x = \arctan 3 + \pi + 2n\pi$ där n är heltal. Således är $-1-3i = \sqrt{10}\, e^{i(\pi + \arctan 3)}$ t.ex.

Svar: $\sqrt{10}\, e^{i(\pi+\arctan 3)}$.

(c) $\arccos\left(\sin \dfrac{37\pi}{12}\right) = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{37\pi}{12}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\dfrac{31\pi}{12}\right)\right) =$

$= \arccos\left(\cos\left(-\dfrac{31\pi}{12} + 2\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right) =$

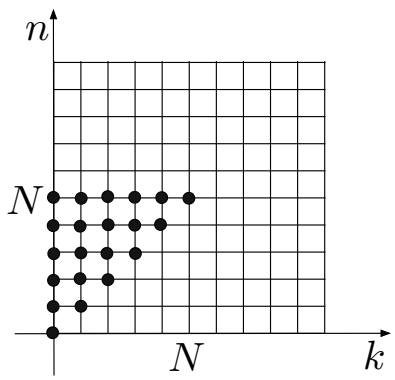
$= \Big/ \text{eftersom } 0 \le \dfrac{7\pi}{12} \le \pi \Big/ = \dfrac{7\pi}{12}.$

Svar: $\dfrac{7\pi}{12}$.

7. Allmänt är $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} a(n,k) = \sum_{k=0}^{N}\big(a(k,k)+a(k+1,k)+\cdots+a(N,k)\big) =$

$$= \big(a(0,0)+a(1,0)+\cdots+a(N,0)\big)+\big(a(1,1)+a(2,1)+\cdots+a(N,1)\big)+\cdots+a(N,N) =$$
$$= a(0,0)+\big(a(1,0)+a(1,1)\big)+\cdots+\big(a(N,0)+a(N,1)+\cdots+a(N,N)\big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{N}\big(a(k,0)+a(k,1)+\cdots+a(k,k)\big) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a(n,k).$$

$\Bigg($ $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} a(n,k)$ betyder att man summerar alla $a(n,k)$ där n och k är heltal sådana att $0 \le k \le N,\ k \le n \le N$, vilket även kan beskrivas av att $0 \le n \le N,\ 0 \le k \le n$, se figur nedan (man summerar radvis istället för kolonnvis). $\Bigg)$



Speciellt fås då att

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}(-1)^k\binom{n}{k}x^{k+1} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{k+1} = x\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot(-x)^k =$$
$$= \Big/\text{Binomialutveckling}\Big/ = x\sum_{n=0}^{N}(1-x)^n =$$
$$= \Big/\text{geometrisk summa, 1:a term} = 1\text{, kvot} = (1-x) \ne 1 \text{ och } N+1 \text{ termer}\Big/ =$$
$$= x\cdot\frac{1-(1-x)^{N+1}}{1-(1-x)} = 1-(1-x)^{N+1}.$$

Svar: $1-(1-x)^{N+1}$.