Dugga 1 i TATM79, 2014-09-08, lösningsförslag

1. (a) $f(t) = 25t^2 - 20t + 15 = 25\left(t^2 - \frac{4}{5}t + \frac{3}{5}\right) = 25\left(\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{3}{5}\right) =$

$= 25\left(\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{11}{25}\right) = 11 + 25\left(t - \frac{2}{5}\right)^2$ visar att $f(t) \geq 11$ för alla t.

Dessutom är $f\left(\frac{2}{5}\right) = 11$, vilket visar att minsta värdet av $f(t)$ är 11.

Svar: $f_{\min} = 11$.

(b) $3 - 3^{-1} + 3^{-3} - \cdots + 3^{-19} = \Big/$geometrisk summa med kvot$= -3^{-2} = -\frac{1}{9}\Big/ =$

$= \sum_{k=0}^{n} 3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^k$, där n ska uppfylla

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^n = 3^{-19} \iff (-1)^n \cdot 3^{1-2n} = 3^{-19} \iff \begin{cases} 1 - 2n = -19 \\ n \text{ jämn} \end{cases} \iff n = 10$$

så vi har en geometrisk summa med kvot$= -\frac{1}{9}$, första term$= 3$ och antal termer$=$ 11 dvs vi får $\sum_{k=0}^{10} 3 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^k = 3 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^{11}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{27}{10} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{9}\right)^{11}\right)$.

Svar: $\frac{27}{10} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{9}\right)^{11}\right)$.

(c) Kalkyl med liggande stolen ger

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
 & 4x^2 & - & 3x & - & 1 & & & & & \\ \hline
 & 4x^4 & - & 3x^3 & + & 7x^2 & - & 7x & + & 13 & \multicolumn{1}{|l}{x^2+2} \\ \cline{11-11}
- & (4x^4 & & & + & 8x^2) & & & & & \\ \cline{1-10}
 & & & -3x^3 & - & x^2 & - & 7x & + & 13 & \\
 & & - & (-3x^3 & & & - & 6x) & & & \\ \cline{3-10}
 & & & & & -x^2 & - & x & + & 13 & \\
 & & & & - & (-x^2 & & & - & 2) & \\ \cline{5-10}
 & & & & & & & -x & + & 15 &
\end{array}$$

dvs kvoten är $4x^2 - 3x - 1$ och resten är $-x + 15$, så

$$\frac{4x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 7x + 13}{x^2 + 2} = 4x^2 - 3x - 1 + \frac{-x + 15}{x^2 + 2}.$$

Svar: $4x^2 - 3x - 1 + \frac{15 - x}{x^2 + 2}$

2. Falluppdelning: $|1 - 2x| = \begin{cases} 1 - 2x \text{ då } x \leq 1/2 \\ 2x - 1 \text{ då } x \geq 1/2 \end{cases}$, $|x - 2| = \begin{cases} x - 2 \text{ då } x \geq 2 \\ 2 - x \text{ då } x \leq 2. \end{cases}$ Vi får tre fall att studera:

$x \leq 1/2$: $|1 - 2x| - |x - 2| = 1 \iff 1 - 2x - (2 - x) = 1 \iff x = -2$, som uppfyller villkoret $x \leq 1/2$.

$1/2 \leq x \leq 2$: $|1 - 2x| - |x - 2| = 1 \iff 2x - 1 - (2 - x) = 1 \iff x = 4/3$, som uppfyller villkoret $1/2 \leq x \leq 2$.

$x \geq 2$: $|1 - 2x| - |x - 2| = 1 \iff 2x - 1 - (x - 2) = 1 \iff x = 0$, som **inte** uppfyller villkoret $x \geq 2$.

Svar: $x = -2$ eller $x = 4/3$.

3. $\frac{x+5}{2+x} \geq \frac{x+1}{2-x} \iff \frac{x+5}{2+x} - \frac{x+1}{2-x} \geq 0 \iff \frac{x+5}{2+x} + \frac{x+1}{x-2} \geq 0 \iff$
$\iff \frac{(x+5)(x-2)+(x+1)(2+x)}{(x+2)(x-2)} \geq 0 \iff \frac{2(x^2+3x-4)}{(x+2)(x-2)} \geq 0 \iff$
$\iff \frac{x^2+3x-4}{(x+2)(x-2)} \geq 0 \iff \frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}{(x+2)(x-2)} \geq 0 \iff \frac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-2)} \geq 0.$
Teckentabellen

x		-4		-2		1		2	
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-2)}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

visar att olikheten gäller då $x \leq -4$, $-2 < x \leq 1$ eller $x > 2$.

Svar: Olikheten gäller då $x \leq -4$, $-2 < x \leq 1$ eller $x > 2$.

4. $z^2 + 2iz + 14 + 8i = 0 \iff (z+i)^2 - (i)^2 + 14 + 8i = 0 \iff (z+i)^2 = -15 - 8i.$
Sätt $z + i = a + bi$ där a och b är reella så fås att $(a+bi)^2 = -15 - 8i \iff$
$\iff a^2 - b^2 + 2abi = -15 - 8i$. Identifiering av real- och imaginärdelar samt absolutbelopp ger
$$\begin{cases} (Re): \; a^2 - b^2 = -15 \\ (Im): \; 2ab = -8. \\ (Abs): \; a^2 + b^2 = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = \sqrt{289} = 17. \end{cases}$$
(Re) och (Abs) ger tillsammans att $2a^2 = 2 \iff a = \pm 1$. Detta insatt i (Im) ger att om a=1 så är $b = -4$ och om $a = -1$ så är $b = 4$. Således är $z + i = 1 - 4i$ eller $z + i = -1 + 4i$, dvs $z = 1 - 5i$ eller $z = -1 + 3i$.

Svar: $z = 1 - 5i$ eller $z = -1 + 3i$.

5. Avståndet mellan z och a ges av $|z - a|$, så vi söker de punkter som uppfyller $|z - 2| = 2|z - i|$. Med $z = x + iy$, där x och y är reella fås
$|z-2| = 2|z-i| \iff \Big/ \text{båda led är} \geq 0 \Big/ \iff |z-2|^2 = 4|z-i|^2 \iff$
$\iff |x - 2 + iy|^2 = 4|x + (y-1)i|^2 \iff (x-2)^2 + y^2 = 4\left(x^2 + (y-1)^2\right) \iff$
$\iff 3x^2 + 4x + 3y^2 - 8y = 0 \iff x^2 + \frac{4}{3}x + y^2 - \frac{8}{3}y = 0 \iff$
$\iff \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{20}{9} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2$. Detta är ekvationen för en cirkel i det komplexa planet, med medelpunkt $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}i$ och radie $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Svar: Cirkeln med medelpunkt $-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}i$ och radie $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.