# Dugga 1 i TATM79, 2014-09-20, lösningsförslag

1. (a) $x^2+3x=1+y-y^2 \iff x^2+3x+y^2-y=1 \iff$

$$\iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} = \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2$$ vilket är

ekvationen för en cirkel med medelpunkt $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ och radie $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Svar: Medelpunkt $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, radie $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

(b) $\sum_{k=3}^{146}(2+4k)$ är en aritmetisk summa med 1:a term $= 2+4\cdot 3$, sista term $= 2+4\cdot 146$ och med antalet termer $= 146-3+1 = 144$. Således är

$$\sum_{k=3}^{146}(2+4k) = 144\cdot\frac{(2+4\cdot 3)+(2+4\cdot 146)}{2} = 144\cdot\frac{4\cdot 150}{2} = 43\,200.$$

Svar: 43 200.

(c) $(3a-b)^5 = \Big/\text{binomialsatsen}\Big/ = \binom{5}{0}\cdot(3a)^5+\binom{5}{1}\cdot(3a)^4\cdot(-b)+\binom{5}{2}\cdot(3a)^3\cdot(-b)^2+$

$+\binom{5}{3}\cdot(3a)^2\cdot(-b)^3+\binom{5}{4}\cdot(3a)\cdot(-b)^4+\binom{5}{5}\cdot(-b)^5 =$

$= \Big/\text{binomialkoefficienter fås t. ex. ur Pascals triangel}\Big/ =$

$= 1\cdot 243\cdot a^5 - 5\cdot 81\cdot a^4b + 10\cdot 27\cdot a^3b^2 - 10\cdot 9\cdot a^2b^3 + 5\cdot 3\cdot ab^4 - 1\cdot b^5 =$

$= 243a^5 - 405a^4b + 270a^3b^2 - 90a^2b^3 + 15ab^4 - b^5.$

Svar: $243a^5 - 405a^4b + 270a^3b^2 - 90a^2b^3 + 15ab^4 - b^5$.

2. $x-\sqrt{21-4x}=6 \iff x-6=\sqrt{21-4x} \implies (x-6)^2 = 21-4x \iff$

$$\iff x^2-8x+15=0 \iff (x-4)^2=1 \iff x=4\pm 1 \iff \begin{cases} x=5 \\ \text{eller} \\ x=3. \end{cases}$$

Eftersom vi inte har ekvivalens i räkningarna **MÅSTE** vi kontrollera.

- $x=5$ ger $x-\sqrt{21-4x} = 5-\sqrt{1} = 5-1 = 4 \neq 6$ så $x=5$ är inte **inte** en lösning.
- $x=3$ ger $x-\sqrt{21-4x} = 3-\sqrt{9} = 3-3 = 0 \neq 6$ så $x=3$ är inte **inte** en lösning.

Således saknar ekvationen lösningar.
*Alt:* $\sqrt{21-4x}$ *är definierat endast då* $21-4x \geq 0$ *dvs då* $x \leq 21/4$. *Men då följer att* $V.L. = x-\sqrt{21-4x} \leq \frac{21}{4} - 0 < 6 = H.L.$ *så ekvationen saknar lösningar.*

Svar: Ekvationen saknar lösningar.

3. $\frac{3}{x} \geq \frac{4x-1}{x+1} \iff \frac{4x-1}{x+1}-\frac{3}{x} \leq 0 \iff \frac{(4x-1)x-3(x+1)}{x(x+1)} \leq 0 \iff$

$$\iff \frac{4x^2-4x-3}{x(x+1)} \leq 0 \iff \frac{x^2-x-\frac{3}{4}}{x(x+1)} \leq 0 \iff \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1}{x(x+1)} \leq 0 \iff$$

$$\iff \frac{\left(x-\frac{1}{2}-1\right)\left(x-\frac{1}{2}+1\right)}{x(x+1)} \leq 0 \iff \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(x+1)} \leq 0.$$

Teckentabellen

| $x$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-\frac{3}{2}$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+\frac{1}{2}$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(x+1)}$ | $+$ | $\nexists$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\nexists$ | $-$ | $0$ | $+$ |

visar att olikheten gäller då $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$ eller $0 < x \leq \frac{3}{2}$.

Svar: Olikheten gäller då $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$ eller $0 < x \leq \frac{3}{2}$.

4. $p(2i) = 4*(2i)^4 + 4\cdot(2i)^3 + 14\cdot(2i)^2 + 16\cdot 2i - 8 = 64 - 32i - 56 + 32i - 8 = 0$. Eftersom $z = 2i$ är ett nollställe till $p$ och polynomet har reella koefficienter så är även $\bar{z} = -2i$ ett nollställe till $p$. Därmed innehåller $p(z)$ faktorerna $(z-2i)$ och $(z+2i)$, så $p(z)$ är delbart med $(z-2i)(z+2i) = z^2+4$. Polynomdivision visar att $\frac{p(z)}{z^2+4} = 4z^2+4z-2 =$
$= 4\left(z^2+z-\frac{1}{2}\right) = 4\left(\left((z+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right) = 4\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= (2z+1+\sqrt{3})(2z+1-\sqrt{3})$, dvs $p(z) = (z-2i)(z+2i)(2z+1-\sqrt{3})(2z+1+\sqrt{3})$, vilket är den komplexa faktoriseringen. Den reella faktoriseringen har vi redan fått i räkningarna ovan, $p(z) = \left(z^2+4\right)(2z+1-\sqrt{3})(2z+1+\sqrt{3})$.

Svar: $p(z) = \left(z^2+4\right)(2z+1-\sqrt{3})(2z+1+\sqrt{3}) =$
$= (z-2i)(z+2i)(2z+1-\sqrt{3})(2z+1+\sqrt{3})$.

5. Låt $P(x) = 3x^{100} - 3x^{50} + 2x^2 - 4x + 1$. Vid division med $x^2+x-2$ fås kvoten $Q(x)$ och resten $R(x) = Ax+B$ (resten har lägre gradtal än nämnaren), med sambandet

$$P(x) = (x^2+x-2)\cdot Q(x) + R(x) = (x^2+x-2)\cdot Q(x) + (Ax+B).$$

För att bestämma $A$ och $B$ sätter vi in de $x$-värden som ger $x^2+x-2=0$, dvs $x=1$ och $x=-2$ i sambandet ovan (för dessa $x$ behöver vi inte veta vad $Q(x)$ är, eftersom det multipliceras med 0). Vi får då sambanden

$$\begin{cases} P(1) = A+B \\ P(-2) = -2A+B \end{cases} \iff \Big/\text{lös systemet}\Big/ \iff \begin{cases} A = \dfrac{P(1)-P(-2)}{3} \\ B = \dfrac{2P(1)+P(-2)}{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \Big/P(1) = -1,\ P(-2) = 3\cdot 2^{100} - 3\cdot 2^{50} + 17\Big/ \iff \begin{cases} A = 2^{50} - 2^{100} - 6 \\ B = 2^{100} - 2^{50} + 5 \end{cases} \quad \text{dvs}$$

$R(x) = \left(2^{50} - 2^{100} - 6\right)x + 2^{100} - 2^{50} + 5$.

Svar: Resten är $\left(2^{50} - 2^{100} - 6\right)x + 2^{100} - 2^{50} + 5$.