# Dugga 2 i TATM79, 2014-09-29, lösningsförslag

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=5}^{200} \frac{3^k}{4}$ är en geometrisk summa med första term $= \dfrac{3^5}{4}$, kvot $= 3$ och med antal termer $= 200 - 5 + 1 = 196$, så $\displaystyle\sum_{k=5}^{200} \frac{3^k}{4} = \frac{3^5}{4} \cdot \frac{3^{196} - 1}{3 - 1} = \frac{3^5}{8}\left(3^{196} - 1\right)$.

Svar: $\dfrac{3^5}{8}\left(3^{196} - 1\right)$.

(b) $\dfrac{x-1}{x} > \dfrac{x}{x-1} \iff \dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x}{x-1} > 0 \iff \dfrac{(x-1)^2 - x^2}{x(x-1)} > 0 \iff$
$\iff \dfrac{1-2x}{x(x-1)} > 0$. Teckentabellen

| $x$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-2x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $x$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\dfrac{1-2x}{x(x-1)}$ | $+$ | $\nexists$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\nexists$ | $-$ |

visar att olikheten gäller då $x < 0$ eller $\dfrac{1}{2} < x < 1$.

Svar: $x < 0$ eller $\dfrac{1}{2} < x < 1$.

(c) $|z| = \left|\dfrac{(1-i)^5}{i(\sqrt{3}+1)^3}\right| = \dfrac{|1-i|^5}{|i| \cdot |\sqrt{3}+i|^3} = \dfrac{\left(\sqrt{1^2 + (-1)^2}\right)^5}{1 \cdot \left(\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}\right)^3} = \dfrac{(\sqrt{2})^5}{2^3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Svar: $|z| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. (a) $3 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x \iff$ / båda led är positiva och ln är injektiv / $\iff$
$\iff \ln(3 \cdot 2^x) = \ln(4 \cdot 5^x) \iff \ln 3 + x \ln 2 = \ln 4 + x \ln 5 \iff$
$\iff x(\ln 5 - \ln 2) = \ln 3 - \ln 4 \iff x = \dfrac{\ln 3 - \ln 4}{\ln 5 - \ln 2}$.

Svar: $x = \dfrac{\ln 3 - \ln 4}{\ln 5 - \ln 2}$.

(b) Logaritmerna är definierade förutsatt att $5 - 2x > 0$, $x - 1 > 0$ och $3 - x > 0$, dvs då $1 < x < \dfrac{5}{2}$. För dessa $x$ fås
$\ln(5-2x) = 2\ln(x-1) - \ln(3-x) \iff \ln((5-2x)(3-x)) = \ln(x-1)^2 \iff$
$\iff$ / ln är injektiv / $\iff (5-2x)(3-x) = (x-1)^2 \iff x^2 - 9x + 14 = 0 \iff$
$\iff \left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 0 \iff x = 7$ eller $x = 2$, men eftersom $1 < x < \dfrac{5}{2}$ så följer att enda lösningen är $x = 2$.

Svar: $x = 2$.

3. (a) $\cos\left(4v+\frac{3\pi}{8}\right)=\sin 2v \iff \cos\left(4v+\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2v\right) \iff$

$$\iff 4v+\frac{3\pi}{8}=\pm\left(\frac{\pi}{2}-2v\right)+n2\pi \iff \begin{cases} 6v=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}+n2\pi \\ \text{eller} \\ 2v=-\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}+n2\pi \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v=\frac{\pi}{48}+\frac{n\pi}{3} \\ \text{eller} \\ v=-\frac{7\pi}{16}+n\pi \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $\begin{cases} v=\frac{\pi}{48}+\frac{n\pi}{3} \\ \text{eller} \\ v=-\frac{7\pi}{16}+n\pi \end{cases}$ där $n$ är heltal.

(b) Eftersom $0<\frac{3}{\sqrt{17}}<1$ så är $0<\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}<\frac{\pi}{2}$, och därmed kan $\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}$ illustreras i en rätvinklig triangel med motstående katet $=3$, hypotenusa $=\sqrt{17}$ och närliggande katet $=\sqrt{(\sqrt{17})^2-3^2}=\sqrt{8}$ (**gör det!**). Alltså är $\tan\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}\right)=\frac{3}{\sqrt{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Svar: $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

(c) $7i-1=\Big/|7i-1|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=\sqrt{50}\Big/=\sqrt{50}\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}+\frac{7}{\sqrt{50}}i\right)=$

$=\sqrt{50}(\cos v+i\sin v)=\sqrt{50}e^{iv}$ där $v$ är en vinkel som uppfyller $\begin{cases} \cos v=-\frac{1}{\sqrt{50}} \\ \sin v=\frac{7}{\sqrt{50}}. \end{cases}$

Den övre ekvationen har lösningarna $v=\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)+n2\pi$ och av dessa uppfyller $v=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)+n2\pi$ den undre ekvationen. Ett argument för $7i-1$ är således $v=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)$, så $7i-1=\sqrt{50}e^{i\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)}$.

Svar: $\sqrt{50}e^{i\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)}$

4. $f(x)$ är definierad då $\begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}-5\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 25. \end{cases}$ För dessa $x$ fås

$y=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5} \iff y(\sqrt{x}-5)=\sqrt{x}+3 \iff \sqrt{x}(y-1)=5y+3 \iff$

$\iff \sqrt{x}=\frac{5y+3}{y-1} \implies x=\left(\frac{5y+3}{y-1}\right)^2$ dvs ekvationen $y=f(x)$ har högst en lösning för varje $y$, vilket visar att $f$ är injektiv och att $f^{-1}(y)=\left(\frac{5y+3}{y-1}\right)^2$.

Svar: $D_f=\{x : x\geq 0,\ x\neq 25\},\ f^{-1}(x)=\left(\frac{5x+3}{x-1}\right)^2$

5. $\sqrt{3}\cos 3x = 1 + \sin 3x \iff \sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 1 \iff$

$$\iff \Big/ \text{bryt ut } \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \Big/ \iff 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x\right) \iff$$

$$\iff \Big/ \begin{cases} \sin v = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos v = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ har en lösning } v = \frac{2\pi}{3} \Big/ \iff$$

$$\iff 2\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos 3x + \cos\frac{2\pi}{3}\sin 3x\right) = 1 \iff 2\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1 \iff$$

$$\iff \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} 3x + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 3x + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{n2\pi}{3} \end{cases} \text{ där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{n2\pi}{3} \end{cases}$ där $n$ är heltal.

6. Eftersom $\dfrac{\sqrt{3}}{7} > 0$ så är $0 < \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{7} < \dfrac{\pi}{2}$ och eftersom $-1 < -\dfrac{6}{\sqrt{39}} < 0$ så är $\dfrac{\pi}{2} < \arccos\left(-\dfrac{6}{\sqrt{39}}\right) < \pi$. Av detta följer att $-\pi < \alpha < 0$. Dessutom är $\tan\alpha =$

$$= \frac{\tan\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{7}\right) - \tan\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)}{1 + \tan\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{7}\right)\cdot\tan\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)} =$$

$$= \Big/ \tan\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right) = \frac{\sin\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)}}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \frac{36}{39}}}{-\frac{6}{\sqrt{39}}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ eftersom } \sin\left(\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{39}}\right)\right) > 0 \Big/ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{7} + \frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

vilket ger $\alpha = \dfrac{\pi}{6} + \pi n$ för något heltal $n$.

Av dessa vinklar är det endast $\alpha = \dfrac{\pi}{6} - \pi = -\dfrac{5\pi}{6}$ som uppfyller villkoret $-\pi < \alpha < 0$, dvs $\alpha = -\dfrac{5\pi}{6}$.

Svar: $\alpha = -\dfrac{5\pi}{6}$.

7. Ett villkor för att vänstra uttrycket ska vara definierat är att $2e^x - a > 0$. För dessa $x$ och $a$ fås att $\dfrac{e^x - 2}{\sqrt{2e^x - a}} = 1 \iff e^x - 2 = \sqrt{2e^x - a}$. För att kunna få likhet måste $e^x - 2 > 0$ d.v.s. $x > \ln 2$. För $x$ som uppfyller båda olikheterna ovan fås

$$\frac{e^x - 2}{\sqrt{2e^x - a}} = 1 \iff e^x - 2 = \sqrt{2e^x - a} \iff (e^x - 2)^2 = 2e^x - a.$$

Här ser vi att om $e^x > 2$ så blir $2e^x - a = (e^x - 2)^2 > 0$, dvs vi behöver bara kontrollera lösningarna mot villkoret $e^x > 2$ på slutet. Vidare får vi

$$(e^x - 2)^2 = 2e^x - a \iff (e^x)^2 - 6e^x + 4 + a = 0 \iff (e^x - 3)^2 + a - 5 = 0 \iff$$
$$\iff (e^x - 3)^2 = 5 - a.$$

Av detta ser vi att

- Om $a > 5$ så saknas lösning.
- Om $a = 5$ så blir $e^x - 3 = 0 \iff x = \ln 3$, som uppfyller villkoret $e^x - 2 > 0$.
- Om $a < 5$ så blir $e^x - 3 = \pm\sqrt{5 - a} \iff e^x = 3 \pm \sqrt{5 - a} \iff x = \ln(3 \pm \sqrt{5 - a})$, där $x = \ln(3 + \sqrt{5 - a})$ förstås uppfyller villkoret $e^x > 2$. För den andra kandidaten, $x = \ln(3 - \sqrt{5 - a})$, fås $e^x - 2 > 0 \iff 1 - \sqrt{5 - a} > 0 \iff \sqrt{5 - a} < 1$, vilket blir uppfyllt om $5 - a < 1 \iff a > 4$.

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = \ln(3 + \sqrt{5 - a}), \text{ om } a \leq 4 \\ x = \ln(3 \pm \sqrt{5 - a}), \text{ om } 4 < a < 5 \\ x = \ln 3, \text{ om } a = 5 \\ \text{lösning saknas om } a > 5. \end{cases}$$