Dugga 2 i TATM79, 2014-10-24, lösningsförslag

1. (a) Falluppdelning, $|x+1| = \begin{cases} x+1 \text{ , om } x \geq -1 \\ -x-1 \text{ , om } x \leq -1. \end{cases}$

För $x \geq -1$ fås $|x+1| - 2x = 3 \iff x+1-2x = 3 \iff x = -2$, som ej uppfyller villkoret $x \geq -1$. Således finns ingen lösning då $x \geq -1$.

För $x \leq -1$ fås $|x+1| - 2x = 3 \iff -x-1-2x = 3 \iff x = -\frac{4}{3}$, som uppfyller villkoret $x \leq -1$. Således är $x = -\frac{4}{3}$ en lösning (och därmed den enda lösningen).

Svar: $x = -\frac{4}{3}$

(b) $\sum_{k=3}^{327}(3k+5)$ är en aritmetisk summa med första term $= 14$, sista term $= 986$ och med antal termer $= 327 - 3 + 1 = 325$, så $\sum_{k=3}^{327}(3k+5) = 325 \cdot \frac{14+986}{2} = 162\,500$.

Svar: $162\,500$.

(c) $\binom{12}{7} = \binom{12}{12-7} = \binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792.$

Svar: 792.

2. (a) Logaritmerna är definierade förutsatt att $(x-1)^2 > 0$, $5 - x > 0$ och $-2 - x > 0$, dvs då $x < -2$. För dessa x fås

$\ln(x-1)^2 - \ln 2 = \ln(5-x) + \ln(-2-x) \iff \ln(x-1)^2 = \ln\left(2(5-x)(-2-x)\right)$
$\iff$ /ln är injektiv/ $\iff (x-1)^2 = 2(5-x)(-2-x)$
$\iff x^2 - 4x - 21 = 0 \iff (x-2)^2 - 25 = 0 \iff x = 2 \pm 5$
$\iff x = -3$ eller $x = 7$. Av dessa båda är det endast $x = -3$ som uppfyller villkoret $x < -2$, dvs $x = -3$ är enda lösningen.

Svar: $x = -3$.

(b) $6e^{-x} - 3e^x = 7 \iff 6 - 3\left(e^x\right)^2 = 7e^x \iff$ /Sätt $t = e^x > 0$/

$\iff 6 - 3t^2 = 7t \iff t^2 + \frac{7}{3}t - 2 = 0 \iff \left(t + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{121}{36} = 0$

$\iff t = -\frac{7}{6} \pm \frac{11}{6} \iff t = \frac{2}{3}$ (eller $t = -3$, men $t > 0$) $\iff e^x = \frac{2}{3}$

$\iff x = \ln\frac{2}{3}$.

Svar: $x = \ln\frac{2}{3}$.

3. (a) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(5\alpha + \frac{\pi}{7}\right) \iff 5\alpha + \frac{\pi}{7} = \pm\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + n2\pi$

$$\iff \begin{cases} 4\alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 6\alpha = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7} + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{21} + \frac{n\pi}{2} \\ \text{eller} \\ \alpha = -\frac{5\pi}{63} + \frac{n\pi}{3} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{21} + \frac{n\pi}{2} \\ \text{eller} \\ \alpha = -\frac{5\pi}{63} + \frac{n\pi}{3} \end{cases}$ där n är heltal.

(b) Låt $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)$. Då fås att $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, eftersom $-1 < -\dfrac{3}{4} < 0$. Därmed är $\cos\alpha = -\dfrac{3}{4}$ och $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \Big/\text{eftersom } \sin\alpha > 0\Big/ = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Således är $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Svar: $-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

(c) $\sin\dfrac{34\pi}{5} = \sin\left(7\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\dfrac{\pi}{5}$ och eftersom $-\dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{\pi}{5} \le \dfrac{\pi}{2}$ så är $\arcsin\left(\sin\dfrac{34\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\pi}{5}$.

Svar: $\dfrac{\pi}{5}$.

4. $f(x)$ är definierad då $7 - e^{\sqrt{x}} > 0 \iff e^{\sqrt{x}} < 7$
$\iff \Big/$exponentialfunktionen är strängt växande$\Big/$
$\iff \sqrt{x} < \ln 7 \iff 0 \le x < (\ln 7)^2$. För dessa x fås
$y = \ln\left(7 - e^{\sqrt{x}}\right) \iff e^y = 7 - e^{\sqrt{x}} \iff e^{\sqrt{x}} = 7 - e^y \iff \sqrt{x} = \ln(7-e^y) \implies$ $x = (\ln(7-e^y))^2$ dvs ekvationen $y = f(x)$ har högst en lösning för varje y vilket visar att f är injektiv och att $f^{-1}(y) = (\ln(7-e^y))^2$.

Svar: $D_f = \{x : 0 \le x < (\ln 7)^2\}$, $f^{-1}(x) = (\ln(7-e^x))^2$.

5. (a) $\left|4 + i\dfrac{i}{i-1}\right| = \left|\dfrac{4i - 4 + i^2}{i-1}\right| = \dfrac{|4i-5|}{|i-1|} = \dfrac{\sqrt{41}}{\sqrt{2}}$.

Svar: $\sqrt{41/2}$.

(b) Vi har $-(1+i\sqrt{3}) = -2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ så om vi sätter $z = re^{i\varphi}$ där $r \ge 0, \varphi \in \mathbf{R}$, så fås $z^6 + 32(1+i\sqrt{3}) = 0 \iff r^6 e^{i6\varphi} = 64e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$\iff \begin{cases} r^6 = 2^6 & \text{(absolutbelopp lika)} \\ 6\varphi = \dfrac{4\pi}{3} + n2\pi,\ n \in \mathbf{Z} & \text{(riktning lika)} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \dfrac{2\pi}{9} + n\dfrac{\pi}{3},\ n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$\iff z = 2e^{i(\frac{2\pi}{9} + n\frac{\pi}{3})}, \quad n = 0,1,2,3,4,5.$

Svar: $z = 2e^{i(\frac{2\pi}{9} + n\frac{\pi}{3})}$, $n = 0,1,2,3,4,5$.

6. Med hjälp av Eulers formler fås att $2\sin ax \sin bx = 2\dfrac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \cdot \dfrac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$ $= -\dfrac{1}{2}\left(e^{i(a+b)x} + e^{-i(a+b)x} - e^{i(a-b)x} - e^{-i(a-b)x}\right) = \cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)$ så sambandet $2\sin ax \sin bx = \cos 3x - \cos 7x$ gäller för alla reella tal x om till exempel $a - b = 3$ och $a + b = 7$. Detta ekvationssystem har lösningen $a = 5, b = 2$. Använder vi ovanstående omskrivning så fås

$\cos 3x - \cos 7x = \sin 2x \iff 2\sin 5x \sin 2x = \sin 2x \iff 2\sin 2x\left(\sin 5x - \dfrac{1}{2}\right) = 0$

$\iff \sin 2x = 0$ eller $\sin 5x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \iff 2x = n\pi$ eller $5x = \dfrac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $5x = \dfrac{5\pi}{6} + n2\pi$, där n är heltal $\iff x = n\dfrac{\pi}{2}$ eller $x = \dfrac{\pi}{30} + n\dfrac{2\pi}{5}$ eller $x = \dfrac{\pi}{6} + n\dfrac{2\pi}{5}$.

Svar: Tex $a = 5, b = 2$. $x = n\dfrac{\pi}{2}$ eller $x = \dfrac{\pi}{30} + n\dfrac{2\pi}{5}$ eller $x = \dfrac{\pi}{6} + n\dfrac{2\pi}{5}$, där n är heltal.

7. För att bägge leden ska vara väldefinierade, måste x och $\dfrac{1-x}{2}$ tillhöra intervallet $[-1,1] = D_{\text{arccos}}$. Eftersom högerledet tillhör intervallet $[0,\pi] = V_{\text{arccos}}$ så måste vänsterledet göra det också så $\arccos x \le \dfrac{2\pi}{3}$, dvs $-\dfrac{1}{2} \le x \le 1$. Om x uppfyller detta så gäller

$$\frac{\pi}{3} + \arccos x = \arccos\frac{1-x}{2} \iff \Big/ \begin{array}{c}\text{bägge led tillhör } [0,\pi] \text{ och cos är injektiv}\\ \text{på detta intervall med inversen arccos}\end{array} \Big/$$

$$\iff \cos\left(\frac{\pi}{3} + \arccos x\right) = \frac{1-x}{2} \iff \cos\frac{\pi}{3}\cos(\arccos x) - \sin\frac{\pi}{3}\sin(\arccos x) = \frac{1-x}{2}$$

$$\iff \Big/ \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} \text{ om } y \in [0,\pi] \Big/ \iff \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} = \frac{1-x}{2}$$

$$\iff 2x - 1 = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} \iff (2x-1)^2 = 3(1-x^2) \text{ och } 2x - 1 \ge 0$$

$$\iff x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{2}{7} = 0 \text{ och } x \ge \frac{1}{2} \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{18}}{7} \text{ och } x \ge \frac{1}{2} \iff \Big/ 4 < \sqrt{18} \Big/$$

$$\iff x = \frac{2+\sqrt{18}}{7}$$

För att räkningarna ska vara korrekta, måste $-\dfrac{1}{2} \le x \le 1$. Detta stämmer för vårt framräknade x eftersom $\sqrt{18} < 5$.

Svar: $x = \dfrac{2+\sqrt{18}}{7}$.