Lösningsförslag TATM79 2015-09-07 08–11

1. (a) Summan är geometrisk med kvoten $q = -3$. Alltså,

$$\sum_{k=3}^{31}(-3)^k = (-3)^3\sum_{k=3}^{31}(-3)^{k-3} = (-3)^3\sum_{j=0}^{28}(-3)^j = -27\cdot\frac{1-(-3)^{29}}{1-(-3)}$$
$$= -27\cdot\frac{1+3^{29}}{4} = -\frac{3^{32}+27}{4}.$$

(b) Vi kvadratkompletterar och finner att

$$p(x) = -4(x^2-3x+3) = -4\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3\right)$$
$$= -4\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) = -3-4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2.$$

Det är här tydligt att $p(x) \leq -3$ med likhet endast då $x = \frac{3}{2}$. Största värdet är alltså -3.

(c) Direkt från definitionen av binomialkoefficienter erhåller vi

$$\binom{16}{4} = \frac{16!}{12!\cdot 4!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2} = 4\cdot 5\cdot 7\cdot 13 = 1820.$$

Svar: (a) $-\dfrac{3^{32}+27}{4}$ (b) -3 (c) 1820.

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{3}{3-x^2-2x} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0 > 1-\frac{3}{3-x^2-2x} = \frac{x^2+2x-3+3}{x^2+2x-3}$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{x(x+2)}{(x+3)(x-1)} < 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-3		-2		0		1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x(x+2)}{(x+3)(x-1)}$	$+$	☠	$-$	0	$+$	0	$-$	☠	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är negativt precis då $-3 < x < -2$ eller $0 < x < 1$.

Svar: $-3 < x < -2$ eller $0 < x < 1$.

3. Beloppen definieras enligt

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & x \geq 5, \\ 5-x, & x \leq 5 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |2-x| = \begin{cases} 2-x, & x \leq 2, \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Intressanta punkter för de olika beloppen som ingår i ekvationen är $x = 5$ och $x = 2$. Vi delar upp i tre olika fall.

Fall 1: $x \leq 2$. Då är

$$|x-5| + x = |2-x| \quad \Leftrightarrow \quad 5-x+x = 2-x \quad \Leftrightarrow \quad x = -3,$$

vilket ligger i rätt intervall ($x \leq 2$). Alltså är $x = -3$ en lösning.

Fall 2: $2 \leq x \leq 5$. Då är

$$|x-5| + x = |2-x| \quad \Leftrightarrow \quad 5-x+x = x-2 \quad \Leftrightarrow \quad 7 = x,$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall. Ingen lösning (i detta fall).

Fall 3: $x \geq 5$. Då är

$$|x-5| + x = |2-x| \quad \Leftrightarrow \quad x-5+x = x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall. Alltså ingen lösning (i detta fall).

Svar: $x = -3$.

4. Vi ska faktorisera polynomet $p(z) = 2z^2 + (3i-5)z + 4$. Steg ett är kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} p(z) &= 2\left(z^2 + \frac{3i-5}{2}z + 2\right) = 2\left(\left(z + \frac{3i-5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3i-5}{4}\right)^2 + 2\right) \\ &= 2\left(\left(z + \frac{3i-5}{4}\right)^2 + \frac{8+15i}{8}\right). \end{aligned}$$

Vi löser ekvationen nu $p(z) = 0$ för att hitta rötterna vilket krävs för att faktorisera $p(z)$. Låt $w = z + \dfrac{3i-5}{4}$. Vi löser

$$w^2 = -\frac{8+15i}{8}, \tag{1}$$

genom att låta $w = a + bi$. Detta leder till att

$$w^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = -\frac{8+15i}{8}.$$

Likhet gäller precis då real- respektive imaginärdelarna av ekvationen är lika, så

$$a^2 - b^2 = -1 \tag{2}$$

och

$$2ab = -\frac{15}{8}. \tag{3}$$

Observera även att (1) medför att

$$|w^2| = \left|-\frac{8+15i}{8}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{15}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+225}{64}} = \frac{17}{8}$$

och eftersom $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2$ vet vi nu att

$$a^2 + b^2 = \frac{17}{8}. \tag{4}$$

Genom att addera ekvation (2) och ekvation (4) ser vi att

$$2a^2 = -1 + \frac{17}{8} = \frac{9}{8} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{3}{4}.$$

Om $a = 3/4$ blir $b = -\dfrac{15}{16a} = -\dfrac{5}{4}$ och om $a = -3/4$ blir $b = \dfrac{5}{4}$ (enligt ekvation (3)). Vi har alltså lösningarna

$$w = \frac{3}{4} - \frac{5i}{4} \qquad \text{och} \qquad w = -\frac{3}{4} + \frac{5i}{4}$$

till ekvation (1). Eftersom $z = w - \dfrac{3i-5}{4}$ följer det att $p(z) = 0$ inträffar precis då

$$z = \frac{3}{4} - \frac{5i}{4} - \frac{3i-5}{4} = 2 - 2i$$

och

$$z = -\frac{3}{4} + \frac{5i}{4} - \frac{3i-5}{4} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

Således blir faktoriseringen

$$p(z) = 2(z - 2 + 2i)\left(z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = (z - 2 + 2i)(2z - 1 - i).$$

Observera 2:an!

Svar: $p(z) = (z - 2 + 2i)\,(2z - 1 - i)$.

5. Alla normaler till linjen L_1, där L_1 beskrivs av sambandet $y = 2x + \dfrac{2}{3}$, har ekvationer på formen $y = -\dfrac{1}{2}x + m$. Vi söker normalen L_2 som går genom punkten $\left(\dfrac{5}{6},\ 4\right)$, vilket innebär att

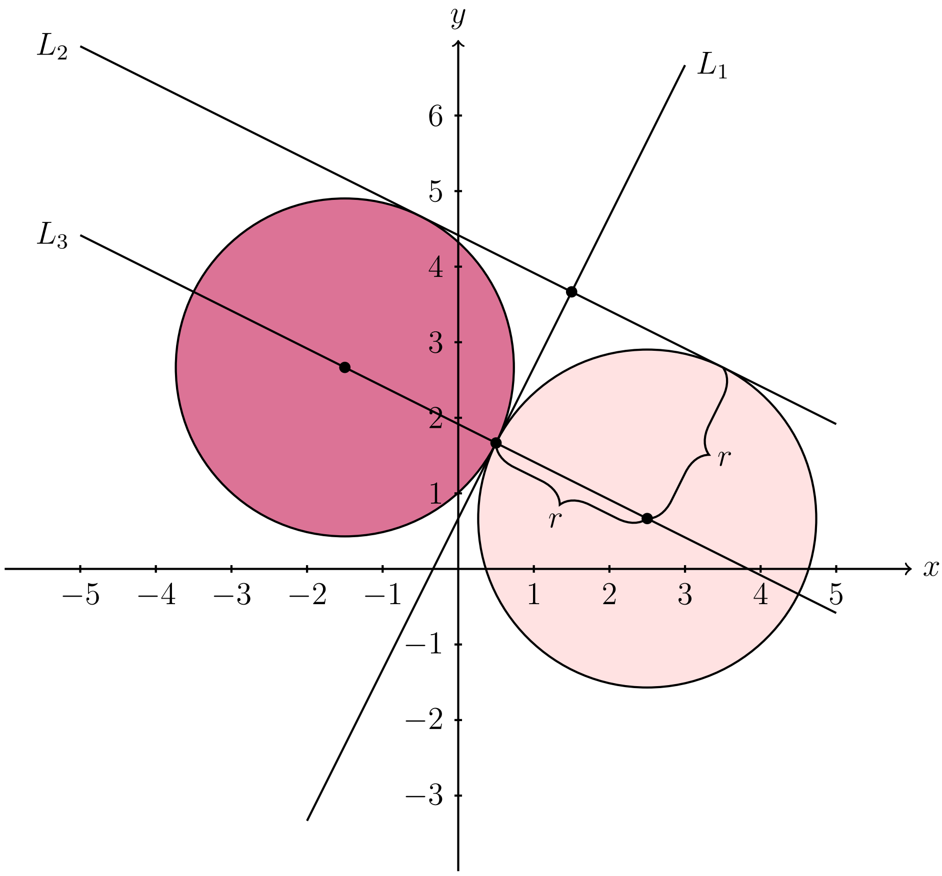
$$m = y + \frac{x}{2} = 4 + \frac{5}{12} = \frac{53}{12}.$$

Normalen skär linjen när

$$2x + \frac{2}{3} = \frac{-x}{2} + \frac{53}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2}x = \frac{45}{12} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2},$$

så skärningspunkten är $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{11}{3}\right)$.

Cirklarna vi söker ska tangera L_1 i $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{3}\right)$ samt även tangera normalen L_2. Det borde finnas två sådana cirklar och på grund av symmetrin och tangeringspunkterna måste dessa cirklar ha samma radie som ges av avståndet mellan skärningspunkten mellan L_1 och L_2 samt den givna tangeringspunkten på L_1. Vi ritar en skiss:



Figur 1: Skiss över hur situationen ser ut.

Radien kan vi räkna ut enligt

$$r^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - \frac{11}{3}\right)^2 = 1 + 2^2 = 5$$

enligt avståndsformeln mellan två punkter i planet. Alla cirklar måste alltså ha radien $\sqrt{5}$. Låt nu L_3 vara linjen parallell med L_2 som går genom $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$. Linjen L_3 har alltså ekvationen $y = -\frac{1}{2}x + m$, där

$$m = y + \frac{x}{2} = \frac{5}{3} + \frac{1}{4} = \frac{23}{12}.$$

De sökta mittpunkterna (a, b) för cirklarna måste ligga på linjen L_3, vilket innebär att

$$b = -\frac{a}{2} + \frac{23}{12}.$$

Avståndet mellan $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right)$ och (a, b) är också $\sqrt{5}$, så

$$\begin{aligned} 5 &= \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - b\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2} - a\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - a = \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{3}{2} \text{ eller } a = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Om $a = -\frac{3}{2}$ blir $b = \frac{3}{4} + \frac{23}{12} = \frac{8}{3}$ och om $a = \frac{5}{2}$ blir $b = -\frac{5}{4} + \frac{23}{12} = \frac{2}{3}$.

Svar: Det finns två cirklar med centrum i $\left(-\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right)$ respektive $\left(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right)$. Båda har radie $\sqrt{5}$.