Lösningsförslag TATM79 2015-09-19 08–11

1. (a) Vi stuvar om och kvadratkompletterar uttrycket:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 = 4x-6y-6 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-4x+y^2+6y+6=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2-4+(y+3)^2-9+6=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+(y+3)^2=7. \end{aligned}$$

Medelpunkten är alltså $(2, -3)$ och radien $\sqrt{7}$.

(b) Vi använder binomialsatsen och finner att

$$\begin{aligned} \left(x-\frac{1}{x}\right)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} \left(\frac{-1}{x}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (-1)^k x^{5-k-k} \\ &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (-1)^k x^{5-2k} \\ &= x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5}. \end{aligned}$$

Koefficienterna $\binom{5}{k}$ finner vi ur Pascals triangel eller direkt från definitionen.

(c) Summan är aritmetisk eftersom $-3-(-8) = 2-(-3) = \cdots = 987-982 = 5$ och termerna kan därför skrivas (tex) som $a_k = 5k-8$, där $k=0$ ger första termen. Vi vet att summan slutar på 987, så sista termen fås då

$$a_k = 987 \quad \Leftrightarrow \quad 5k = 995 \quad \Leftrightarrow \quad k = 199.$$

Det är alltså 200 termer i serien. Enligt känd formel för aritmetiska summor erhåller vi nu

$$\sum_{k=0}^{199} (5k-8) = \frac{-8+987}{2} \cdot 200 = 97900.$$

Svar: (a) $(2, -3)$ och $\sqrt{7}$ (b) Se ovan (c) 97900.

2. Åtminstone två alternativ finns. Vi kan reda ut ordentligt precis vilka intervall som är möjliga att finna lösningar i för att därmed kunna räkna med ekvivalenser. Eller så är vi lite slarvigare och använder implikationer i stället, då till priset att alla funna lösningar **måste** testas i **ursprungsekvationen**. Vi använder alternativ 2 och finner att

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2-\frac{15}{2}x+2} = 1-2x \quad &\Rightarrow \quad 2x^2-\frac{15}{2}x+2 = (1-2x)^2 = 1-4x+4x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2+\frac{7}{2}x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+\frac{7}{4}x-\frac{1}{2}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-7\pm 9}{8}. \end{aligned}$$

Om $x = \dfrac{1}{4}$ blir

$$\begin{aligned}
\text{V.L.} &= \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{15}{8} + 2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \\
\text{H.L.} &= 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vänsterled och högerled stämmer överens, så detta är en lösning. Om $x = -2$ blir

$$\begin{aligned}
\text{V.L.} &= \sqrt{8 + 15 + 2} = \sqrt{25} = 5, \\
\text{H.L.} &= 1 - 2\,(-2) = 5.
\end{aligned}$$

Alltså är även $x = -2$ en lösning.

Svar: $x = -2$ eller $x = \dfrac{1}{4}$.

3. (a) Låt oss ansätta att $z = x + iy$, där $x, y \in \mathbf{R}$. Då är

$$\begin{aligned}
iz + 3\,\bar{z} - \operatorname{Re} z = i \quad &\Leftrightarrow \quad i(x + iy) + 3(x - iy) - x = i \\
&\Leftrightarrow \quad -y + 3x - x + i(x - 3y) = i.
\end{aligned}$$

Eftersom det enda sättet att uppfylla olikheten är att real- och imaginärdelarna stämmer överens är denna ekvation ekvivalent med

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x - 3y = 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 2x, \\ -5x = 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{5}, \\ y = -\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Svaret blir alltså $z = -\dfrac{1 + 2i}{5}$.

(b) Vi förenklar:

$$\left| \frac{2}{i + 1} + \frac{i + 1}{2} \right| = \left| \frac{2(-i + 1)}{2} + \frac{i + 1}{2} \right| = \left| \frac{3 - i}{2} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Svar: (a) $z = -\dfrac{1 + 2i}{5}$ (b) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

4. Vi formulerar om enligt

$$x^5 + 8x^2 \leq 4x^4 \quad \Leftrightarrow \quad x^5 - 4x^4 + 8x^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x^3 - 4x^2 + 8) \leq 0.$$

Låt $p(x) = x^2(x^3 - 4x^2 + 8)$ vara polynomet i vänsterledet. Vi behöver faktorisera 3:e-grads-uttrycket och börjar med att gissa roten $x = 2$. Polynomdivision med motsvarande faktor $x - 2$ ger nu enligt faktorsatsen att $p(x) = x^2(x - 2)(x^2 - 2x - 4)$. Vi kvadratkompletterar och faktoriserar 2:a-grads-utrycket:

$$p(x) = x^2(x - 2)((x - 1)^2 - 5) = x^2(x - 2)(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5}).$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket för att undersöka när $p(x) \leq 0$. Intressanta punkter är $x = 0, 2, 1 \pm \sqrt{5}$.

		$1-\sqrt{5}$		0		2		$1+\sqrt{5}$	
$x-1+\sqrt{5}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1-\sqrt{5}$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$p(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Härav följer att $p(x) \leq 0$ precis då $x \leq 1-\sqrt{5}$, $x=0$, eller $2 \leq x \leq 1+\sqrt{5}$.

Svar: $x \leq 1-\sqrt{5}$, $x=0$, eller $2 \leq x \leq 1+\sqrt{5}$.

5. (a) Summan är inte uppenbart av någon sort vi känner igen direkt. Det går alltså inte att gissa här och använda någon formel, även om man skulle skriva ut några termer och tycka sig se ett mönster. Däremot ser vi att termerna består av en polynomkvot så vi börjar med att faktorisera täljaren: $k^2-5k-14=(k+2)(k-7)$. Vi kan alltså förkorta bort en faktor $k+2$ och har då visat att summan är aritmetisk:

$$\sum_{k=17}^{197} \frac{k^2-5k-14}{k+2} = \sum_{k=17}^{197} \big(k-7\big) = \frac{10+190}{2} \cdot 181 = 18100.$$

(b) Om vi skriver ut summan ser vi att nämnaren i termerna alternerar mellan 2 och 4, och om vi grupperar termerna enligt detta så uppstår två stycken liknande geometriska summor med n termer:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{3^k}{3+(-1)^k} &= \frac{3}{3-1} + \frac{3^2}{3+1} + \frac{3^3}{3-1} + \frac{3^4}{3+1} + \cdots + \frac{3^{2n-1}}{3-1} + \frac{3^{2n}}{3+1} \\
&= \left(\frac{3}{2} + \frac{3^3}{2} + \frac{3^5}{2} + \cdots + \frac{3^{2n-1}}{2}\right) + \left(\frac{3^2}{4} + \frac{3^4}{4} + \frac{3^6}{4} + \cdots + \frac{3^{2n}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2} + \frac{3^3}{2} + \frac{3^5}{2} + \cdots + \frac{3^{2n-1}}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{3^3}{2} + \frac{3^5}{2} + \cdots + \frac{3^{2n-1}}{2}\right) \\
&= \frac{5}{4}\big(3 + 3^3 + 3^5 + \cdots + 3^{2n-1}\big) \\
&= \frac{15}{4}\big(9^0 + 9^1 + 9^2 + \cdots + 9^{n-1}\big) \\
&= \frac{15}{4} \sum_{k=0}^{n-1} 9^k = \frac{15}{4} \frac{9^n-1}{9-1} = \frac{15}{32}\big(9^n-1\big).
\end{aligned}$$

Svar: (a) 18100 (b) $\frac{15}{32}\big(9^n-1\big)$.