

Lösningsförslag TATM79 2015-09-28 08–12

1. (a) Summan är aritmetisk och kan därmed beräknas enligt

$$\sum_{k=100}^{300} (2k - 50) = \frac{150 + 550}{2} \cdot 201 = 70350.$$

- (b) Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{1}{x-1} > \frac{1}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{(x-1)(2x+1)} > 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

	-2			$-\frac{1}{2}$		1
$x+2$	-	0	+		+	+
$2(x+1/2)$	-		-	0	+	+
$x-1$	-		-		-	0
$\frac{x+2}{(x-1)(2x+1)}$	-	0	+	☠	-	☠

Vi ser ur tabellen att uttrycket är positivt precis då $-2 < x < -\frac{1}{2}$ eller $x > 1$.

- (c) Enligt definition av kvot och rest gäller att

$$p(x) = (2x-4)(x^2+x-2) + (-6x+8) = 2x^3 - 2x^2 - 14x + 16.$$

Svar: (a) 70350 (b) $-2 < x < -\frac{1}{2}$ eller $x > 1$ (c) $2x^3 - 2x^2 - 14x + 16$.

2. (a) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x < 2$, $x < 0$, samt $x > -8$. Totalt sett måste vi alltså kräva att $-8 < x < 0$. Antag att x uppfyller detta villkor. Då gäller att

$$\begin{aligned} \ln(2-x) - \ln(-x) - 2\ln 2 + \ln(8+x) &= 0 &\Leftrightarrow &\ln((2-x)(8+x)) = \ln(-4x) \\ &&\Leftrightarrow &(2-x)(8+x) = -4x \\ &&\Leftrightarrow &x^2 + 2x - 16 = 0 \\ &&\Leftrightarrow &x = -1 \pm \sqrt{17}, \end{aligned}$$

där $x = -1 + \sqrt{17}$ inte uppfyller villkoret.

- (b) För att logaritmen ska vara definierad krävs att $(x+2)^2 > 0$, vilket är ekvivalent med att $x \neq -2$. Om detta är sant så är

$$\ln(x+2)^2 = 2 \Leftrightarrow (x+2)^2 = e^2 \Leftrightarrow x = -2 \pm e.$$

Ingen av kandidaterna blir lika med -2 , så både löser ekvationen (testa).

Svar: (a) $x = -1 - \sqrt{17}$ (b) $x = -2 \pm e$.

3. Enligt Eulers formler kan vi skriva

$$\begin{aligned}\cos 7x \sin^2 3x &= \left(\frac{e^{i7x} + e^{-i7x}}{2} \right) \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{-8} (e^{i7x} + e^{-i7x}) (e^{i6x} - 2 + e^{-i6x}) \\ &= \frac{1}{-8} (e^{i13x} + e^{ix} + e^{-ix} + e^{-i13x} - 2(e^{i7x} + e^{-i7x})) \\ &= \frac{1}{4} (2 \cos 7x - \cos x - \cos 13x).\end{aligned}$$

Ekvationen vi vill lösa kan därför skrivas

$$\begin{aligned}4 \cos 7x \sin^2 3x = \cos x - \cos 13x &\Leftrightarrow 2 \cos 7x - \cos x - \cos 13x = \cos x - \cos 13x \\ &\Leftrightarrow \cos 7x = \cos x \\ &\Leftrightarrow 7x = \pm x + 2\pi n.\end{aligned}$$

Således blir lösningarna

$$x = \frac{\pi n}{4} \text{ eller } x = \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Svar: $\cos 7x \sin^2 3x = \frac{1}{4} (2 \cos 7x - \cos x - \cos 13x)$; $x = \frac{\pi n}{4}$ eller $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. (a) Ur enhetscirkeln ser vi att

$$\sqrt{2} \sin 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \text{eller} \\ 3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, \end{cases}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

(b) Vi vet att $\cos(-v) = \cos v$, så

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$$

eftersom $0 \leq \frac{\pi}{5} \leq \pi$.

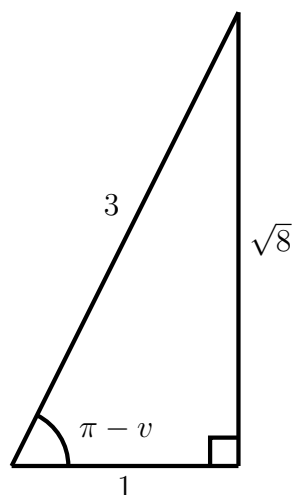
(c) Låt $v = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Då vet vi att $\tan v < 0$ eftersom vi är i andra kvadranten. Vi "flyttar" vinkeln genom att skriva

$$\cos v = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos(\pi - v) = \frac{1}{3}.$$

Eftersom $\pi - v \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ger en vettig rätvinklig hjälptriangel med kateterna 1 och $\sqrt{9-1} = \sqrt{8}$ att

$$\tan v = -\tan(\pi - v) = -\frac{\sqrt{8}}{1} = -\sqrt{8}.$$



Svar: (a) $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$ eller $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$ (b) $\frac{\pi}{5}$ (c) $-\sqrt{8}$

5. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $x > 0$ är kravet för att båda logaritmerna ska vara definierade. Vidare får inte

$$\ln 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Alltså blir

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : x > 0, x \neq \frac{1}{2} \right\}.$$

Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \exp\left(\frac{1 + \ln x}{\ln 2x}\right) &\Rightarrow \ln y = \frac{1 + \ln x}{\ln 2x} \\ &\Rightarrow \ln y = \frac{1 + \ln x}{\ln 2 + \ln x} \\ &\Rightarrow (1 - \ln y) \ln x = (\ln 2) \ln y - 1 \\ &\Rightarrow \ln x = \frac{(\ln 2) \ln y - 1}{1 - \ln y} \\ &\Rightarrow x = \exp\left(\frac{(\ln 2) \ln y - 1}{1 - \ln y}\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y så måste detta vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$.

Svar: $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x > 0, x \neq \frac{1}{2}\}$ och $f^{-1}(y) = \exp\left(\frac{(\ln 2) \ln y - 1}{1 - \ln y}\right)$.

6. (a) Eftersom $e^a > 0$ för alla $a \in \mathbf{R}$ kan vi skriva

$$\frac{e^x}{e^y} = \exp\left(\ln \frac{e^x}{e^y}\right) = \exp(\ln e^x - \ln e^y) = \exp(x - y) = e^{x-y},$$

där vi endast använt välkända logaritmlagar och att exp och ln är varandras inverser.

- (b) En binomisk ekvation löser vi genom att gå över till polära koordinater. Först låter vi $w = z - 5$ och skriver sedan $w = re^{i\theta}$ för $r > 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Vi söker alla lösningar till ekvationen

$$w^5 = r^5 e^{i5\theta} = i + \sqrt{3}. \quad (1)$$

Det komplexa talet $i + \sqrt{3}$ ligger i första kvadranten och kan skrivas

$$i + \sqrt{3} = \sqrt{1+3} e^{i\pi/6} = 2e^{i\pi/6}.$$

För att (1) ska gälla måste högerledet och vänsterledet ha samma absolutbelopp och argumenten måste stämma överens upp till en heltalsmultipel av 2π . Således måste

$$r^5 = 2 \quad \text{och} \quad 5\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom $r > 0$ måste $r = 2^{1/5}$ (enda möjligheten), och θ kan vi lösa ut ur den andra ekvationen som

$$\theta = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Eftersom lösningarna ligger jämt fördelade på en cirkel och det finns precis 5 lösningar så räcker det med, tex, $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Lösningarna till (1) ges alltså av

$$w = 2^{1/5} e^{i\left(\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Om vi går tillbaka till z (eftersom $w = z - 5$) ges alltså lösningarna av

$$z = 5 + 2^{1/5} e^{i\left(\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Svar: (a) Se ovan (b) $z = 5 + 2^{1/5} e^{i\left(\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$

7. För att $f(x)$ ska vara definierad på ett sammanhängande intervall måste vi kräva att

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x^2 - 6x + 11 < \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (2)$$

för något $n \in \mathbf{Z}$. Det går inte att ta med fler punkter eftersom $\tan(t)$ ej är definierad då $t = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ för $n \in \mathbf{Z}$, så det skulle resultera i något som inte är ett intervall. Vidare vill vi att $2 \in D_f$ och eftersom $x^2 - 6x + 11 = 3$ om $x = 2$ så måste vi välja $n = 1$ i (2). Vi löser ut x ur villkoret i (2) och finner att

$$0 < (x - 3)^2 + 2 - \frac{\pi}{2}$$

för alla x , så den vänstra olikheten är OK. För den högra finner vi att

$$(x - 3)^2 + 2 < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \left(x - 3 - \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2}\right) \left(x - 3 + \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2}\right) < 0,$$

vilket händer precis när (gör en teckentabell!)

$$3 - \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2} < x < 3 + \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2}. \quad (3)$$

Nu återstår frågan om $x \mapsto \tan(x^2 - 6x + 11)$ är injektiv på detta intervall. Det visar sig att så inte är fallet på grund av 2:a-gradspolynomet. Från kvadratkompletteringen av polynomet ser vi att

$$x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2$$

och därmed har polynomet ett minimum i $x = 3$ och är strängt avtagande för $x \leq 3$ och strängt växande för $x \geq 3$. Eftersom vi vill ha $2 \in D_f$ ger (3) och $2 \leq 3$ att

$$3 - \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2} < x \leq 3$$

är nödvändigt och tillräckligt för att f^{-1} ska existera. Detta villkor ger alltså vårt D_f . Nu återstår bara att räkna ut ett uttryck för denna invers. Vi sätter $y = f(x)$ och antar att $x \in D_f$. Eftersom

$$y = \tan t, \quad \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow t = \pi + \arctan y,$$

så gäller att

$$\begin{aligned}y = f(x) &\Rightarrow \pi + \arctan y = x^2 - 6x + 11 \\&\Rightarrow (x - 3)^2 + 2 - \arctan y - \pi = 0 \\&\Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{\pi - 2 + \arctan y}.\end{aligned}$$

Eftersom $x \leq 3$ för $x \in D_f$ så är det endast den negativa roten som ger en lösning. Således blir

$$f^{-1}(y) = 3 - \sqrt{\pi - 2 + \arctan y}.$$

$$\textbf{Svar: } D_f = \left[3 - \sqrt{\frac{3\pi}{2} - 2}, 3 \right], f^{-1}(y) = 3 - \sqrt{\pi - 2 + \arctan y}.$$