Lösningsförslag TATM79 2015-10-23 08–12

1. (a) Vi kvadrerar ekvationen och undersöker vilka kandidater som finns:

$$x = \sqrt{\frac{3-5x}{2}} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{3-5x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+5x-3=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \text{ eller } x = -3.$$

Vi ser direkt att $x = -3$ är omöjlig eftersom vänsterledet då blir negativt. Direkt kontroll visar att

$$\text{H.L.} = \sqrt{\frac{3-5\cdot\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = \text{V.L.}$$

så $x = \dfrac{1}{2}$ är en lösning.

(b) Vi förlänger med konjugatet till respektive nämnare för att få bort alla imaginära storheter i nämnarna:

$$\frac{3}{i-1} - i\frac{2}{2+i} = \frac{3(-i-1)}{2} - i\frac{2(2-i)}{5} = -\frac{19}{10} - \frac{23}{10}i.$$

Imaginärdelen blir således $-\dfrac{23}{10}$ (inget i här!).

Svar: (a) $x = \dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{23}{10}$.

2. (a) Om vi studerar ekvationen ser vi att x förekommer som 2^x och 4^x. En lämplig substitution utgörs alltså av $t = 2^x$ (så $t > 0$). Ekvationen kan då ekvivalent formuleras som

$$t^2 - 8t + 16 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (t-4)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = 5 \text{ eller } t = 3.$$

Vi återgår nu till den ursprungliga variabeln:

$$2^x = t = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x\ln 2 = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

och

$$2^x = t = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x\ln 2 = \ln 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 5}{\ln 2}.$$

(b) För att alla logaritmer i ekvationen ska vara definierade krävs att $x > 0$. Vidare måste $x \neq 1$ (varför?). Antag att x uppfyller dessa villkor. Då gäller att

$$\ln\left(e^2x\right) = \frac{1}{\ln x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln e^2 + \ln x = \frac{1}{\ln x} \quad \Leftrightarrow \quad (\ln x)(2+\ln x) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 + 2\ln x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+\ln x)^2 - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln x = -1 \pm \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp\left(-1\pm\sqrt{2}\right),$$

där båda lösningarna uppfyller villkoren.

Svar: (a) $x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ eller $x = \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$ (b) $x = \exp\left(-1\pm\sqrt{2}\right)$.

3. (a) Ur enhetscirkeln ser vi att

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(6x+\frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x-\dfrac{\pi}{8}=6x+\dfrac{\pi}{4}+2\pi n \\ \qquad \text{eller} \\ 2x-\dfrac{\pi}{8}=\pi-\left(6x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\pi n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-\dfrac{3\pi}{32}-\dfrac{\pi n}{2} \\ \text{eller} \\ x=\dfrac{7\pi}{64}+\dfrac{\pi n}{4}, \end{cases}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

(b) Eftersom $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ gäller att

$$\begin{aligned} 2\cos 2x = 1+4\cos x \quad &\Leftrightarrow \quad 2(2\cos^2 x-1)=1+4\cos x \\ &\Leftrightarrow \quad 4\cos^2 x-4\cos x-3=0. \end{aligned}$$

Låt $t=\cos x$ (så $-1\le t\le 1$). Då ges ekvationen ovan av

$$0=4t^2-4t-3=4\left(t^2-t-\frac{3}{4}\right)=4\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-1\right)=4\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right).$$

Om $t=\dfrac{3}{2}$ saknas lösningar till $t=\cos x$. Om $t=-\dfrac{1}{2}$ blir

$$\cos x=-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,$$

där $n\in\mathbf{Z}$.

Svar: (a) $-\dfrac{3\pi}{32}-\dfrac{\pi n}{2}$ eller $\dfrac{7\pi}{64}+\dfrac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$ (b) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$

4. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Argumentet till ln måste vara positivt, så

$$\frac{2x-3}{x-5}>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>5 \text{ eller } x<\frac{3}{2}.$$

Detta kan ses med hjälp av tex en teckentabell:

		$\frac{3}{2}$		5	
$2x-3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{2x-3}{x-5}$	$+$	0	$-$	☠	$+$

Definitionsmängden blir således

$$D_f=\left\{x\in\mathbf{R} : x<\frac{3}{2} \text{ eller } x>5\right\}.$$

För $x \in D_f$ gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln\left(\frac{2x-3}{x-5}\right) \quad &\Rightarrow \quad e^y = \frac{2x-3}{x-5} \\ &\Rightarrow \quad (x-5)e^y = 2x-3 \\ &\Rightarrow \quad x(e^y-2) = 5e^y-3 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{5e^y-3}{e^y-2}. \end{aligned}$$

Den sista implikationen är ok ty $y \neq \ln 2$ om $x \in D_f$. Vi finner endast en lösning, vilket innebär att $f^{-1}(y) = \dfrac{5e^y-3}{e^y-2}$.

Svar: $D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : x < \dfrac{3}{2} \text{ eller } x > 5\right\}$ och $f^{-1}(y) = \dfrac{5e^y-3}{e^y-2}$.

5. Ekvationen kan formuleras om enligt

$$\begin{aligned} \frac{\exp(\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sin 2x))}{\exp(3\cos 2x)} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \exp(\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sin 2x)) = \exp(3\cos 2x) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{6} = \sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{12}\right] \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\sin 2x + \frac{3}{\sqrt{12}}\cos 2x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \end{aligned}$$

eftersom exp är injektiv. Tanken är här att koefficienterna före $\sin 2x$ och $\cos 2x$ ska utgöra koordinater för en punkt på enhetscirkeln. Vi skriver om högerledet med hjälpvinkelomskrivning som

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin(2x+v) = \sin v\cos 2x + \cos v \sin 2x$$

där $\cos v = \dfrac{1}{2}$ och $\sin v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. En vinkel v som uppfyller detta är $v = \dfrac{\pi}{3}$. Vi återgår till att lösa ekvationen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\pi}{4} = 2x + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \text{eller} \\ \dfrac{3\pi}{4} = 2x + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} - \pi n \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{5\pi}{24} - \pi n, \end{array}\right. \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = -\dfrac{\pi}{24} - \pi n$, $x = \dfrac{5\pi}{24} - \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. (a) Låt
$$\alpha = \arctan(-2) + \arctan(-3).$$
Då är
$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\arctan(-2)) + \tan(\arctan(-3))}{1 - \tan(\arctan(-2))\tan(\arctan(-3))} = \frac{-5}{1-6} = 1.$$
Eftersom
$$\tan v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$
så måste $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ för *något* $n \in Z$. Eftersom α är en given vinkel, finns det bara ett n som är rätt. Det återstår alltså bara att bestämma n och för att göra det **måste** vi ha en uppfattning om hur stor α är. Således,
$$-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\arctan(0) = 0$$
eftersom arctan är strängt växande. Detta innebär att $n \geq 0$ ej är möjligt. Vidare blir $n < -1$ för litet. Om $n = -1$ hamnar $\dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{3\pi}{4}$ i rätt intervall. Alltså är $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$.

(b) Vi skriver om argumenten till vinklar som ligger i lämpligt område och erhåller då
$$\begin{aligned}\arctan(\tan 2)\frac{\arccos(\cos 2)}{\arcsin(\sin 2)} &= \arctan(\tan(2-\pi))\frac{\arccos(\cos 2)}{\arcsin(\sin(\pi - 2))} \\ &= (2-\pi)\frac{2}{\pi - 2} = -2\end{aligned}$$
eftersom $\dfrac{\pi}{2} < 2 < \pi$ så $2 \in [0,\pi]$ och $\arccos(\cos x) = x$ för $x \in [0,\pi]$, $2-\pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ och $\arctan(\tan x) = x$ för $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, samt $\pi - 2 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ och $\arcsin(\sin x) = x$ för $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Svar: (a) $-\dfrac{3\pi}{4}$ (b) -2.

7. Uttrycket påminner om binomialsatsen, så vi försöker skriva om enligt detta:
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k\cos^k(2x) = (-1)^n 2^{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^n\frac{1}{2^n}(-2)^k\cos^k(2x) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{1}{2^{n-k}}\cos^k(2x) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\cos^k(2x) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{2} + \cos(2x)\right)^n = 2.\end{aligned}$$

Således ska vi lösa en ekvation på formen $t^n = 2$, vilket eftersom $t \in \mathbf{R}$ innebär att $t = 2^{1/n}$ om n är udda och $t = \pm 2^{1/n}$ om n är jämn. Alltså,
$$-\frac{1}{2} + \cos(2x) = 2^{1/n} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \frac{1}{2} + 2^{1/n}$$

vilket saknar lösningar eftersom $2^{1/n} > 1$ för alla $n \geq 1$. Detta innebär att det inte finns några lösningar om n är udda. Om n är jämn så finns även möjligheten att

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} + \cos(2x) = -2^{1/n} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \frac{1}{2} - 2^{1/n} \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2} - 2^{1/n}\right) + 2\pi m \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{2} - 2^{1/n}\right) + \pi m,
\end{aligned}$$

där $m \in \mathbf{Z}$. Här är arccos-termen definierad eftersom

$$-1 < \frac{1}{2} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} - 2^{1/n} \leq \frac{1}{2}$$

för alla $n \geq 2$.

Svar: $\pm \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{2} - 2^{1/n}\right) + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$ om $n = 2, 4, 6, \ldots$. Om n är udda saknas lösning.