Lösningsförslag TATM79 2017-09-16

1. (a) Summan är geometrisk med kvoten $q = 1/9$ och 106 termer. Alltså,

$$\sum_{n=-1}^{104} \frac{1}{3^{2n}} = 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{106}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{81}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{106}\right).$$

(b) Först skriver vi om z på formen $a + ib$:

$$z = i\frac{4+i}{1-2i} - 2i = i\frac{(4+i)(1+2i)}{5} - 2i = \frac{2}{5}i - \frac{9}{5} - 2i = -\frac{9}{5} - \frac{8}{5}i.$$

Här ser vi direkt att imaginärdelen blir $-\dfrac{8}{5}$.

(c) Vi kvadratkompletterar och finner att

$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x^2 - 5x + 8) = -2\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 8\right) \\ &= -\frac{7}{2} - 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Det är här tydligt att $f(x) \leq -\frac{7}{2}$ med likhet endast då $x = \dfrac{5}{2}$. Största värdet är alltså $-\dfrac{7}{2}$.

Svar: (a) $\dfrac{81}{8}\left(1 - \left(\dfrac{1}{9}\right)^{106}\right)$ (b) $-\dfrac{8}{5}$ (c) $-\dfrac{7}{2}$.

2. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{2x}{x^2 + x - 12} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + x - 12} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-4)(x+3)}{(x+4)(x-3)} \geq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för det funna uttrycket.

		-4		-3		3		4	
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(x-4)(x+3)}{(x+4)(x-3)}$	$+$	☠	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $x < -4$, $-3 \leq x < 3$, eller $x \geq 4$.

Svar: $x < -4$, $-3 \leq x < 3$ eller $x \geq 4$.

3. Beloppen definieras enligt

$$|t+2| = \begin{cases} t+2, & t \geq -2, \\ -t-2, & t \leq -2 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad |3-2t| = \begin{cases} 3-2t, & t \leq \frac{3}{2}, \\ 2t-3, & t \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Speciellt intressanta punkter (där något växlar tecken) för de olika beloppen som ingår i ekvationen är $t = -2$ och $t = \frac{3}{2}$. Vi delar upp i tre olika fall.

Fall 1: $t \leq -2$. Då är

$$|3-2t| - |t+2| = t \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 2t + t + 2 = t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{5}{2},$$

vilket *inte* ligger i rätt intervall.

Fall 2: $-2 \leq t \leq \frac{3}{2}$. Då är

$$|3-2t| - |t+2| = t \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 2t - t - 2 = t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{4},$$

vilket ligger i rätt intervall. Alltså är $t = \frac{1}{4}$ en lösning.

Fall 3: $t \geq \frac{3}{2}$. Då är

$$|3-2t| - |t+2| = t \quad \Leftrightarrow \quad 2t - 3 - t - 2 = t \quad \Leftrightarrow \quad -5 = 0,$$

vilket inte är sant. Alltså inga lösningar här.

Svar: $t = \frac{1}{4}$.

4. Cirkeln kan beskrivas med ekvationen

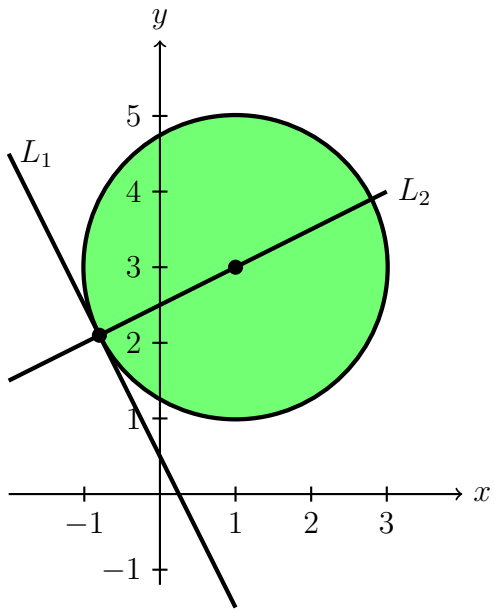
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2,$$

där $r > 0$ är radien (i nuläget okänd). Om linjen $L_1 :\ 2y = 1-4x$ ska tangera cirkeln måste linjen L_2 som går genom cirkelns mittpunkt och tangeringspunkten vara vinkelrät mot L_1. Således har L_2 riktningskoefficienten $\frac{1}{2}$ och eftersom $(1,3)$ ligger på L_2 måste $2y = x + 5$ vara ekvationen för L_2. Tangeringspunkten där L_1 tangerar cirkeln måste sammanfalla med skärningspunkten mellan L_1 och L_2. Linjerna skär varandra när $x + 5 = 1 - 4x \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$. Den eftersökta punkten blir således $\left(-\frac{4}{5}, \frac{21}{10}\right)$. Vi kan nu räkna ut cirkelns radie:

$$r^2 = \left(-\frac{4}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{21}{10} - 3\right)^2 = \frac{81}{25} + \frac{81}{100} = \frac{81}{20},$$

så radien är alltså $\frac{9}{\sqrt{20}}$.

Vi ritar en figur och ser till att allt verkar rimligt.



Svar: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{81}{20}$.

5. Låt $z = iy$, $y \in \mathbf{R}$, vara en rent imaginär rot till $p(z)$. Då är

$$0 = p(iy) = y^4 - y^3 + (6-6i)y^2 + (6i-8)y - 16 + 12i$$

ekvivalent med

$$y^4 - y^3 + 6y^2 - 8y - 16 = 0 \tag{1}$$

och

$$-6y^2 + 6y + 12 = 0, \tag{2}$$

där vi delat upp i real- och imaginärdel (eftersom vi vet att $y \in \mathbf{R}$). Vi löser ekvation (2):

$$-6y^2+6y+12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2-y-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 \text{ eller } y = -1.$$

Här är alltså två kandidater. Kontroll i ekvation (1) visar direkt att $p(-i) = p(2i) = 0$. Således erhåller vi att $(z+i)(z-2i) = z^2 - iz + 2$ är en faktor i $p(z)$. Polynomdivision leder till resultatet

$$p(z) = (z+i)(z-2i)(z^2 - 8 + 6i).$$

Vi hittar rötterna till den sista faktorn. Låt $z = a + bi$ med $a, b \in \mathbf{R}$. Vi söker lösningar till

$$z^2 = 8 - 6i \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2abi - b^2 = 8 - 6i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 8, \\ 2ab = -6. \end{cases}$$

Vidare gäller att

$$a^2 + b^2 = |z|^2 = |z^2| = |8 - 6i| = \sqrt{100} = 10,$$

så $2a^2 = 18 \;\Leftrightarrow\; a = \pm 3$. Om $a = 3$ blir $b = -1$ och om $a = -3$ blir $b = 1$ enligt ekvationen $2ab = -6$. Således måste $z = 3 - i$ och $z = -3 + i$ vara lösningarna.

Svar: $p(z) = 0$ då $z = -i$, $z = 2i$, $z = 3 - i$, eller $z = -3 + i$.